


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d'ordine





Darstellung

der

Näherungswerthe von Kettenbrüchen

in independenter Form

von

Dr. phil. Siegmund Günther,
Privatdocent an der Universität Erlangen.





Erlangen, 1873.
Verlag von Eduard Besold.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.



Vorwort.

Es wird im Folgenden eine Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen vermittelst Determinanten gegeben, welche, wenn auch schon mehrfach angedeutet, doch wohl hier zuerst in systematischer Form erscheint. Insbesondre ward Gewicht gelegt auf die kritische Darstellung der mannigfaltigen älteren und neueren Versuche, die independente Darstellung der Näherungswerthe zu ermöglichen. Denn die Geschichte der Mathematik wird am meisten gefördert durch eine derartige gesonderte Bearbeitung einzelner Partien der Wissenschaft; die geschichtlichen Arbeiten von Todhunter über die Wahrscheinlichkeits-, von Giessel über die Variationsrechnung, von M. Cantor und Friedlein über die Zahlzeichen, von Cherbuliez über gewisse Theile der mathematischen Physik, legen hiefür beredtes Zeugniss ab. Gehört das vorliegende Problem auch durchaus nicht zu den wichtigsten, so ist seine genaue historische Bearbeitung doch besonders deshalb von Interesse, weil sich Gelegenheit bietet, die immerhin merkwürdige combinatorische Analysis in den Bereich der Betrachtung zu ziehen.

Die wahre Fruchtbarkeit dieser neuen Darstellungsweise wird sich besonders im 3. Kapitel erweisen, indem hier theils verschiedne bekannte Sätze eine bequemere Fassung und einen kürzeren Beweis erhalten, theils auch die Determinantentheorie

manche ihrer Sätze für die Lehre von den Kettenbrüchen auf neue und interessante Weise zu verwerthen gestattet.

Erst während des Druckes wurde mir durch das Jahrbuch bekannt, dass der dänische Mathematiker Thiele denselben Gegenstand bearbeitet habe; eine Einsicht seiner Abhandlung war mir leider nicht möglich. Dem Referat des Jahrbuchs zufolge scheinen jedoch bei ihm Anwendungen auf die Geometrie im Vordergrund zu stehen, während die vorliegende Arbeit theils historischen, theils analytischen Inhalts ist.

Dr. phil. S. Günther.

Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form.

Kapitel I.

Vergleichende Uebersicht der bisher zu diesem Zwecke angewandten Methoden.

1. Regeln zur bequemen Darstellung und Berechnung der Näherungswerthe eines Kettenbruchs gab zuerst der deutsche Mathematiker Daniel Schwenter, Professor zu Altdorf im ersten Viertel des 17. Jahrhunderts, und zwar sind diese Regeln im Wesentlichen ganz die noch jetzt von uns gebrauchten. Nachdem Schwenter bei der Aufgabe [1]: „Einen grossen Bruch, so nicht aufgehebt werden mag arithmeticè, doch mechanicè mit kleinern Zahlen auf allerley Art auszusprechen" zuerst die Verwandlung eines gemeinen Bruchs, nämlich des Bruchs $\frac{177}{233}$ in einen Kettenbruch, sodann die Anfertigung folgenden Tableaus gelehrt hat, führt er folgendermassen

233		1	1 0
177 56 9 2 1	1 3 6 4 2	0	
0	0		

fort: „Ferner spricht man, einmal nulla ist nulla, eins dazu ist eins, diss schreibt man unter eins nulla, gegen der rechten Hand. Dar-

nach sagt man, einmal eins ist eins, nulla dazu ist eins, diss schreibt man nnter das vorige eins. Item 3 mal eins ist 3, eins so drüber stehet dazu ist 4, diss schreibt man nnter die zwey eins, hernach 6 mal 4 ist 24, und eins, so darüber stehet, dazu ist 25, die unterschreibt man auch: Also 4 mal 25 ist 100, nnd 4 dazu, ist 104, und 2 mal 104 ist 208, dazu 25, seynd 233.

Letzlich macht man anch die mittlere Ordnung, als: Einmal Nnlla ist nichts, eins dazu ist eins, 3 mal eins ist 3, Nulla dazu ist 3, und 6 mal 3 ist 18, eins dazu ist 19, und 4 mal 19 ist 76, und 3 dazu ist 79, und 2 mal 79 ist 158, und 19 dazu, ist 177, stehet also:

			1
233		1	0
177	1	0	1
56	3	1	1
9	6	3	4
2	4	19	25
1	2	79	104
0	0	177	233

Nun sihet man hieraus, dass erstlich zu unterst der Bruch gantz vollkommen herauskommt, nun möchte ein Mechanicus den andern darüber branchen als $\frac{79}{104}$ wäre aber dieser noch zu gross, könte er den dritten nehmen, als $\frac{19}{25}$, oder den vierdten $\frac{3}{4}$, doch ist hierbey zu wissen, je weiter man von dem nntersten hinaufsteiget, je mehr es fehlet. Znm Exempel $\frac{79}{104}$, seyend näher bey $\frac{177}{233}$, als $\frac{19}{25}$, und $\frac{19}{25}$ näher, als $\frac{3}{4}$, und so fortan, welches eine sehr nutzliche Regul in dem Landmessen." Man sieht, dass hier das recurrente Gesetz des Fortschreitens der Zähler und Nenner eines Näherungsbruches vollständig richtig angegeben ist; selbst die Vorsetzung des Bruches $\frac{1}{0}$ findet sich bereits.

Auch Wallis [2]) nnd Huygens [3]) beschäftigen sich mit der estimmnng der Näherungswerthe. Insbesondere ist die Darstellungs-

weise des erstren wichtig, weil er zuerst die Bnchstabenbezeichnung anwandte nnd den Satz

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{a_n p_{n-1} + b_n q_{n-2}}$$

bewies, unter $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ resp. den nten, (n—1)ten und (n—2)ten Näherungsbruch des allgemeinen Kettenbruchs verstanden. An die Auffindung eines independenten Gesetzes konnte damals noch nicht gedacht werden.

1) Schwenter, Deliciae Physico-Mathematicae oder Mathemat. und Philosophische Erquickstunden, Nürnberg 1636. S. 111.

2) Wallis, Arithmetica Infinitorum. sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaque difficiliora Matheseos Problemata, Oxonii 1656. S. 191.

3) Huygens, Descriptio Automati Planetarii; Opuscula Postuma, Hagae-Comitum 1698. S. 453.

2. Die Lehre von den Kettenbrüchen verdankt bekanntlich Euler fast Alles, was ihr im Lanfe des 18. Jahrhunderts an Bereicherungen zu Theil wnrde; insbesondere jedoch bildete den Gegenstand seiner Bemühungen die Ueberführung unendlich fortlanfender Kettenbrüche in andre „unendliche Ansdrücke," Produkte nnd Reihen. Hiebei musste es nun von höchster Wichtigkeit sein, ein allgemeines Gesetz zn kennen, welches die Bildnng jedes beliebigen Näherungsbruches gestattete ohne die oft mühsame Berechnnng aller vorhergehenden.

In der That scheint sich Enler vielfach mit diesem Gegenstande beschäftigt zn haben, ohne ein günstiges Resultat zu erzielen so dass er sich zu dem Ausspruche veranlasst sah, dass „das Gesetz, nach welchem der Zähler und Nenner in diesen anf die gewöhnliche Art ausgedruckten Brüchen ans den Bnchstaben a, b, c, d, etc. formirt werden, nicht leicht zu erkennen ist [4])." An dieser Stelle wird nur die recurrente Berechnung der Näherungswerthe gelehrt, und zwar mit Zuhülfenahme des Bruches $\frac{1}{0}$.

Da die gewöhnlichen Bezeichnungsweisen zur Herstellung des gesuchten independenten Gesetzes nicht genügten, so schuf Euler sich einen eignen Algorithmns nnd stellte Regeln auf, um mit diesen Symbolen ganz wie mit andren algebraischen Zeichen rechnen

zu können. Auffallend muss es erscheinen, dass Euler bei seinen vielfachen Versuchen die von Cramer und andren schon mehrfach angewandten Determinanten nicht zu seinem Zwecke benützte, sondern sich mit seinen im Ganzen doch ziemlich unvollkommenen combinatorischen Symbolen behalf [5]).

Euler geht von dem Kettenbruche

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$$

aus, und setzt den Nenner des vierten Näherungswerthes

$$bcd + d + b = (b, c, d)$$

und den Zähler

$$abcd + cd + ad + ab + 1 = (a, b, c, d)$$

Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar folgende Relationen:

$$(a, b) = b\,(a) + 1 = b\,(a) + (\ )$$
$$(a, b, c) = c\,(a, b) + (a)$$
$$(a, b, c, d) = d\,(a, b, c) + (a, b)$$
$$(a, b, c, d, e) = e\,(a, b, c, d) + (a, b, c)$$

und allgemein

$$(a, b, c \ldots p, q, r) = r\,(a, b, c \ldots p, q) + (a, b, c \ldots p).$$

Auf einfache Weise gelangt man zu dem höchst wichtigen Satze, dass

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b + \ldots + \frac{1}{p + \frac{1}{q}}}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{q + \frac{1}{p + \ldots + \frac{1}{b + \frac{1}{a}}}}$$

gleiche Nenner ergeben; es ist nämlich

$$(a, b) = (b, a)$$
$$(a, b, c) = (c, b, a)$$
$$(a, b, c, d) = (d, c, b, a)$$
$$(a, b, c, d, e) = (e, d, c, b, a)$$

„Dummodo ergo ordo indicum detur, sive sit directus, sive retrogradus, perinde est; utroque enim modo idem numerus inde formatus obtinetur."

Hieraus ergiebt sich unmittelbar

$$(a, b, c, d, \text{etc.}) = a(b, c, d, \text{etc.}) + (c, d, \text{etc.})$$

und hieraus

$$\frac{(a, b, c, d, e)}{(b, c, d, e)} = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$$

Auch der Werth eines unendlichen Kettenbruches kann in derselben Weise als Quotient zweier unendlichen Symbole ausgedrückt werden.

Zunächst wird nun mit Hülfe des Algorithmus der Nachweis geführt, dass jeder folgende Näherungsbruch sich dem wahren Werthe immer mehr und mehr nähert, und hiezu ist es nöthig, den Satz zu beweisen

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = \pm 1$$

wenn p_1, p_2 die Zähler, q_1, q_2 die Nenner zweier aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche sind. Der Gang des Beweises ist im wesentlichen folgender:

$$\begin{aligned} &(a, b, c \ldots p, q)\,(b, c \ldots p, q, r) - (b, c \ldots p, q)\,(a, b, c \ldots p, q, r) \\ &= (a, b, c \ldots p, q)\ r\ (b, c \ldots p, q) + (a, b, c \ldots p, q)\,(b, c \ldots p) \\ &- (b, c \ldots p, q)\ r\ (a, b, c \ldots p, q) - (b, c \ldots p, q)\,(a, b, c \ldots p) \\ &= - [(a, b, c \ldots p)\,(b, c \ldots p, q) - (b, c \ldots p)\,(a, b, c \ldots p, q)] \end{aligned}$$

Nun ist offenbar der hier in Klammern stehende Ausdruck die Differenz, welche der von uns berechneten vorhergeht, wenn man die sämmtlichen Differenzen, entsprechend der obigen, bildet; somit sind diese sämmtlichen Differenzen, mit abwechselndem Vorzeichen, gleich. Nun ist

$$(a)\,(b) - 1\,(a, b) = -1$$

somit allgemein

$$(a, b, c, d \ldots m)\,(b, c, d \ldots m, n) - (b, c, d \ldots m)\,(a, b, c, d \ldots m, n) = \pm 1$$

Die aufeinanderfolgenden Differenzen zweier Näherungsbrüche lassen sich hiernach folgendermassen darstellen

$$\frac{(a)}{1} - \frac{(a, b)}{(b)} = \frac{-1}{1\,(b)}$$

$$\frac{(a, b)}{(b)} - \frac{(a, b, c)}{(b, c)} = \frac{+1}{(b)\,(b, c)}$$

$$\frac{(a, b, c)}{(b, c)} - \frac{(a, b, c, d)}{(b, c, d)} = \frac{-1}{(b, c)\,(b, c, d)}$$

$$\frac{(a, b, c, d)}{(b, c, d)} - \frac{(a, b, c, d, e)}{(b, c, d, e)} = \frac{+1}{(b, c, d)\,(b, c, d, e)}$$

und hieraus ergiebt sich durch einfache Addition ein Mittel, jeden Kettenbruch in eine Reihe zu verwandeln; es ist nämlich

$$\frac{(a, b, c, d, e \dots)}{(b, c, d, e \dots)} = a + \frac{1}{1\,(b)} - \frac{1}{(b)\,(b, c)} + \frac{1}{(b, c)\,(b, c, d)} - \frac{1}{(b, c, d)\,(b, c, d, e)} + \dots$$

oder auch

$$\frac{(a, b, c, d, e \dots)}{(b, c, d, e \dots)} = a + \frac{1}{b} - \frac{d}{(b)\,(b, c, d)} - \frac{f}{(b, c, d)\,(b, c, d, e, f)} - \frac{h}{(b, c, d, e, f)\,(b, c, d \dots h)} - \dots$$

Diese sämmtlichen Ableitungen werden zwar mit Hülfe des neuen Algorithmus durchgeführt, ohne dass derselbe jedoch in einer anderen Rolle, als in der einer bequemeren Bezeichnungsweise auftritt; Euler bemerkt diess selbst, indem er sagt. „Sed missis his, quae ad series spectant, quoniam ea jam fusius sum persecutus, perpendamus ea, quae ad singularem harum quantitatum algorithmum pertinent“ [6]).

Die nun folgenden Sätze werden mit Hülfe der symbolischen Bezeichnungsweise allerdings leichter gewonnen, als auf dem gewöhnlichen Wege. Durch Induktion gelangt man zu folgender Gruppe von Relationen:

$$(a \dots y) - (a, b \dots y, z) - (a, b \dots y, z)\,(a, b \dots y) = 0$$
$$(a, b \dots y) - (b, c \dots y, z) - (a, b \dots y, z)\,(b, c \dots y) = \pm 1$$
$$(a, b, c \dots y) - (c, d \dots y, z) - (a, b \dots y, z)\,(c, d \dots y) = \pm (a)$$
$$(a, b, c, d \dots y) - (d, e \dots y, z) - (a, b \dots y, z)\,(d, e \dots y) = \pm (a, b)$$
$$\vdots$$

welche sämmtlich als spezielle Fälle des folgenden Hauptsatzes erscheinen:

$$(a \dots l, m, n \dots p)\,(n \dots p, q, r \dots z) - (a \dots l, m, n \dots p, q, r \dots z)\,.\,(n \dots p) = \pm (a \dots l)\,(r \dots z)$$

Es folgt hierauf noch eine Anweisung, derartige Formeln in beliebiger Anzahl herzustellen [7]): „Hujusmodi autem formulae, quot lubuerit, facile sequenti modo exhiberi possunt; sumatur tertium vinculum, quod est completum, et omnes indices continet, abscindan-

tur ab initio superne ii indices, qui primum vinculum constituant, tum inferne a fine ii, qui vinculum secundum constituant; ita tamen, ut in duobus primis vinculis omnes indices occurrant. Tum qui locis abscissis utrinque sunt vicini puncto notentur, indeque facile hujusmodi formulae exhibentur:"

$$|\overline{a,\ b,\ |\underline{c,\ d}}|\ \underline{e,\ f}|\ \text{giebt}$$

$$(a, b, c, d)\ (c, d, e, f) - (a, b, c, d, e, f)\ (c, d) = -\ (a)\ (f)$$

$$|\overline{a,\ b,\ c,}|\ |\underline{d,\ e,\ f}|\ \text{giebt}$$

$$(a, b, c)\ (d, e, f) - (a, b, c, d, e, f)\ 1 = -\ (a, b)\ (e, f)$$

$$|\overline{a,\ b,\ c,\ |\underline{d,}}|\ \underline{e,\ f}|\ \text{giebt}$$

$$(a, b, c, d)\ (d, e, f) - (a, b, c, d, e, f)\ (d) = +\ (a, b)\ (f).$$

Zum Schlusse der Abhandlung wird noch eine Anwendung dieser Sätze auf die Bestimmung der Differenzen zweier beliebiger Näherungswerthe gemacht. Legt man wieder einen Kettenbruch

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \ldots}}}}}$$

zu Grunde, so erhält man, wenn A, B, C . , . die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche sind,

$$A - B = -\frac{1}{1\,(b)} \qquad B - E = +\frac{(d, e)}{(b)\ (b, c, d, e)}$$

$$A - C = -\frac{(c)}{1\,(b, c)} \qquad B - F = +\frac{(d, e, f)}{(b)\ (b, c, d, e, f)}$$

$$A - D = -\frac{(c, d)}{1\,(b, c, d)} \qquad C - D = -\frac{1}{(b, c)\ (b, c, d)}$$

$$A - E = -\frac{(c, d, e)}{1(b, c, d, e)} \qquad C - E = -\frac{(e)}{(b, c)\ (b, c, d, e)}$$

$$B - C = +\frac{1}{(b)\ (b, c)} \qquad C - F = -\frac{(e, f)}{(b, c)\ (b, c, d, e, f)}$$

$$B - D = +\frac{(d)}{(b)\ (b, c, d)} \qquad C - G = -\frac{(e, f, g)}{(b, c)\,(b, c, d, e, f, g)}$$

$$\vdots$$

„Quoniam igitur in doctrina de fractionibus continuis, cuius jam aliquot specimina edidi, hujus generis numeri per indices formati totum negotium conficiunt: algorithmi eorum species, quam hic exposui, nec non insignes comparationes inventae, non exiguum prae-

stabunt usum in hoc argumento uberius excolendo, unde has animadversiones usu non carituras esse confido" [8]).

Diese hier ausgesprochene Hoffnung Euler's gieng nicht in Erfüllung, Euler selbst bediente sich seines Algorithmus nur noch ein einzigesmal bei Auflösung eines Problems der unbestimmten Analytik [9]), obwohl er sich später noch vielfach mit den Kettenbrüchen beschäftigte. Die gleichzeitigen Mathematiker scheinen sich gar nicht dieser immerhin nur wenig verwendbaren Rechnnngsmethoden bedient zu haben; Daniel Bernoulli [10]) tadelt besonders den Umstand, dass Euler nicht den allgemeinen Kettenbruch

$$\cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \ldots}}}$$

als Ausgangspunkt genommen habe. Mit Recht sagt Hindenburg [11]): „Man kann sich mehrere solche besondere Algorithmen und daraus abgeleitete Formeln für andere Aufgaben, wo es Schwierigkeiten hat, die Endresultate aus den gegebenen Grössen ohne Umschweife darzustellen, gedenken. Wollte man aber auch dergleichen ausarbeiten, so würden sie immer als isolirte, nicht aus einer gemeinschaftlichen Quelle fliessende Formeln und Vorschriften, dem Gedächtnisse zur Last fallen, und doch insgesamt als einzelne kleine Bäche in den Strömen eines weit ausgebreiteten Calculs sich verlieren, die sich sämmtlich in den unermesslichen Ocean combinatorischer Veränderungen ergiessen.«

4) L. Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen, deutsch von Michelsen, Berlin 1788. 1. Buch, S. 387.

5) Id. Specimen Algorithmi Singularis, Novi Commentarii Acad. Scient. Imp. Petropolitanae, Tom. IX, 1764. S. 53.

6) Ibid. S. 64.

7) Ibid. S. 67.

8) Ibid. S. 69.

9) L. Euler, De usu novi Algorithmi, Novi Commentarii Acad. Scient. Imp. Petropolitanae, Tom. XI, 1766. S. 28.

10) D. Bornoulli, De fractionibus continuis, ibid. Tom. XX, 1775. S. 41.

11) Hindenbnrg, Mehrere grosse Mathematiker sind der Erfindung der combinatorischon Involntionen ganz nahe gewesen, Archiv der reinen und angewandten Mathematik, Loipzig 1795. 1. Bd. S. 336.

Anmerkung. Eine oigenthümliche Anwondnng hat dieser Euler'sche

Algorithmus in neuerer Zeit bei Lejeune-Dirichlet[12]) gefunden, welcher vermittelst desselben einige auf Kettenbrüche bezügliche Sätze beweist.

12) Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind, Braunschweig 1863. S. 49.

3. In Euler's „Algorithmus" war bereits unzweideutig ausgesprochen, dass nur die Combinatorik den Schlüssel zur Auffindung eines independenten Gesetzes gewähren könne, und in der That sind alle Versuche, welche gleichzeitige und spätere Mathematiker zu diesem Zwecke machten, auf combinatorische Regeln gegründet. Nach Hindenburg's Bemerkung hat Frisi[13]) eine derartige combinatorische Involution gefunden.

Auch Lambert, welcher zuerst die Lehre von den Kettenbrüchen zusammenstellte, beschäftigte sich viel mit diesem Gegenstande. Er geht von dem Bruche

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots}}}}$$

aus[14]) und stellt zunächst, ähnlich wie Schwenter (s. o. 1.) die Zähler und Nenner der aufeinanderfolgenden Näherungswerthe in einer Tabelle zusammen.

B	1 C	0 D
a	0	1
b	1	a
c	b	ab + 1
d	bc + 1	abc + c + a
=	= =	= = =

Seine Regel zur recurrenten Berechnung der Näherungswerthe stimmt natürlich ganz mit derjenigen Euler's überein. Nach Hindenburg's Ansicht[15]) hätte es nur der Erweiterung obigen Schemas auf einige weitere Glieder bedurft, um deutlich eine combinatorische Involution hervortreten zu sehen. Geht man von dem allgemeinen Kettenbruche

$$A + \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \ldots}}$$

aus, so nimmt jenes Tableau folgende Gestalt an:

B	1 C	0 D
$\frac{\alpha}{a}$	A	1
$\frac{\beta}{b}$	$Aa + \alpha = \binom{Aa}{\alpha}$	a
$\frac{\gamma}{g}$	$\binom{Aa}{\alpha}\ b + A\beta$	$ab + \beta$
$\frac{\delta}{d}$	$\binom{Aa}{\alpha}\begin{bmatrix} bc \\ \gamma \end{bmatrix} + A\beta c$	$a\begin{bmatrix} bc \\ \gamma \end{bmatrix} + \beta c$
$\frac{\varepsilon}{e}$	$\binom{Aa}{\alpha}\begin{bmatrix} bcd \\ \gamma d \\ b\delta \end{bmatrix} + A\beta\begin{bmatrix} cd \\ \delta \end{bmatrix}$	$a\begin{bmatrix} bcd \\ \gamma d \\ b\delta \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} cd \\ \delta \end{bmatrix}$
$\frac{\varphi}{f}$	$\binom{Aa}{\alpha}\begin{bmatrix} bcde \\ \gamma de \\ b\delta e \\ bc\varepsilon \\ \gamma\varepsilon \end{bmatrix} + A\beta\begin{bmatrix} cde \\ \delta e \\ c\varepsilon \end{bmatrix}$	$a\begin{bmatrix} bcde \\ \gamma de \\ b\delta\varepsilon \\ bc\varepsilon \\ \gamma\varepsilon \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} cde \\ \delta e \\ c\varepsilon \end{bmatrix}$

Auch aus diesem Schema leitet Hindenburg (a. a. O. S. 329) eine in combinatorischen Zeichen ausgedrückte, allerdings aber durchaus nicht eigentlich independente Formel ab.

Ernstlicher als Lambert bemühte sich Daniel Bernoulli (a. a. O. S. 24 etc.) mit Auffindung eines independenten Gesetzes. Wie sich schon aus der oben angeführten Aeusserung über Euler's Verfahren erwarten lässt, legt er den allgemeinen Kettenbruch zu Grunde. Jedoch scheint auch er an der Möglichkeit eines im eigentlichen Sinne independenten Gesetzes verzweifelt zu haben, denn er beschäftigt sich lediglich mit der Vervollkommung und Vereinfachung der zur Darstellung der Näherungswerthe bisher angewandten Methoden. Sind $\frac{M}{N}$ und $\frac{P}{Q}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe, und erhält man den hierauf folgenden $\frac{R}{S}$, wenn man den Kettenbruch bei dem „Index“ $\frac{f}{\varphi}$ abbricht, so ist

$$\frac{R}{S} = \frac{P\varphi + Mf}{Q\varphi + Nf}$$

Bernoulli betrachtet es nun als eine wesentliche Erleichterung („praestantissimum compendium“) des gewöhnlichen Verfahrens, dass man nunmehr blos die zusammengehörigen Glieder aus den

heiden vorhergehenden Werthen abzuschreiben und ihnen die Buchstaben f und φ beizufügen braucht.

Hindenburg (a. a. O. S. 333) sucht auch hier wiederum nachzuweisen, dass ein „blosser Zufall, ein schmales Blatt Papier, das die Complexionen nicht neben einander fassen konnte, hätte veranlassen können, die Complexionen, auch nur eines einzigen Werthes, z. B. des 5ten, in ihrer Ordnung nicht neben, sondern unter einander zu schreiben: so hätten sich ihm, da die einzelnen Complexionen bereits gut geordnet waren, die Involutionen

für Zähler

α β	γ	δ	ε
a	c	δ	ε
a	β	d	ε
a	β	γ	e
	a	c	e

u. s. w.

und

für Nenner

a	β	γ	δ	ε
	b	γ	δ	ε
	a	c	δ	ε
	α	β	d	ε
		b	d	ε
	α	β	γ	e
		b	γ	e
		α	c	e

u. s. w.

des 5ten und aller vorhergehenden, und so auch das Fortgangsgesetz für die folgenden Werthe auf einmal vor Augen gestellt, und er würde sie, und ihre Wichtigkeit, auch ohne eingeschriebene Winkel, wohl nicht übersehen und verkannt haben."

13) Pauli Frisii opera, Mediolani 1782. Tom. I. S. 38.

14) Hindenburg, a. a. O. S. 322.

15) Lambert, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, Berlin 1765—1772. 2. Theil. 1. Abschnitt. III. Abtheilung.

4. Wir kommen nunmehr zu der Periode der eigentlich so genannten combinatorischen Analysis. Alle bisher angeführten Mathematiker hatten sich bereits combinatorischer Symbole und Darstellungsweisen bedient; da jedoch die für dieselben gültigen Gesetze eine systematische Bearbeitung noch nicht erfahren hatten, so konnten auch die bezüglichen Bemühungen keinen besondren Erfolg haben. Dagegen war es einer der ersten Gedanken Hindenburg's, die Kraft seiner neuen Analysis an dem bisher so unzugänglichen Probleme zu prüfen, und in der That gelang es ihm bald, Resultate zu veröffentlichen [16]. Später hat er die Lehre von den Näherungswerthen in einer grösseren Abhandlung bearbeitet.

Eine „combinatorische Involution" ist im Sinne Hindenburg's [17]) ein Verfahren, vermittelst dessen „für jede ausser der Ordnung geforderte Glieder, Coëfficienten oder Werthe, die Anordnung aus gegebenen Grössen, durch Ziffern oder andre Zeichen zu Complexionen, so getroffen wird, dass in dem Ausdrucke dafür nichts Ueberflüssiges enthalten ist, was zu dem geforderten Gliede nicht gehört, zugleich aber alle vorhergehende Glieder, wie sie, in und neben einander liegend, die folgenden bestimmen, auf's klärste und deutlichste mit vor Augen liegen." Ein Winkelhaken trennt je zwei aufeinanderfolgende Glieder.

Dem Charakter der stets mit Symbolen operirenden Hindenburg'schen Analysis gemäss wird der allgemeine Kettenbruch in der Form

$$z = \frac{1}{2 + \frac{3}{4 + \ldots}}$$

eingeführt, wo die Zahlen nichts andres, als die in der neueren mathematischen Bezeichnungsweise üblichen Indices sind Es wird diess durch folgendes Schema angedeutet:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 & \ldots \\ \mathfrak{a}, & a, & \mathfrak{b}, & b, & \mathfrak{c}, & c, & \mathfrak{d}, & d & \ldots \end{pmatrix}$$

Die „Ordnungszahlen" 1, 2, 3 . . . sind in der damaligen Ausdrucksweise „Lokalzeichen von der einfachsten Art", indem man unter Lokalzeichen damals überhaupt die Darstellung irgend eines Ausdrucks aus einer Reihe beliebiger gesetzmässig fortlaufender Ausdrücke vermittelst eines Symboles verstand, dem zum Nachweis der Stelle, welchen der betreffende Ausdruck in jener Reihe einnahm, eine Ziffer beigeschrieben war.

Um zunächst das recurrente Gesetz bequemer auszudrücken, seien die Zähler der Näherungswerthe mit den grossen Buchstaben des deutschen, die Nenner mit den grossen Buchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet, ee ist dann

$$\frac{\mathfrak{N}}{N} = zvn = \frac{\overset{-1}{\mathfrak{N}}\,2n + \overset{-2}{\mathfrak{N}}\,(2n-1)}{\overset{-1}{N}\,2n + \overset{-2}{N}\,(2n-1)}$$

wo — 1 und — 2 keine wirklichen, sondern sogenannte „Distanzexponenten" bedeuten. Nunmehr ist bereits folgende Aufgabe gelöst worden (a. a. O. S. 31): „Zwo Glieder P, Q, oder ihre Werthe

A, B seyen als Anfangsglieder (oder überhaupt als zwey unmittelbar auf einander folgende Glieder) einer Reihe gegeben. Die Summe der Produkte, des zweyten Werthes 𝔅 in einen Faktor c und des ersten 𝔄 in c, sollen den folgenden Werth ℭ, und die Summe zwoer ähnlichen Produkte, des neugefundenen Werthes ℭ in d, und des zweiten 𝔅 in 𝔟, den nächstfolgenden Werth 𝔇, und das fortgesetzte ähnliche Verfahren, den weiter folgenden Werth 𝔈 u. s. w. alle übrige Werthe. Man soll den Erfolg dieses Verfahrens in einer combinatorischen Involution (1) in Buchstaben und Ziffern, nach dem Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \ldots \\ \mathfrak{a} & a & \mathfrak{b} & h & \mathfrak{c} & c & \mathfrak{b} & d & \mathfrak{e} & e \ldots \end{pmatrix}$$

angeben.“ Hieraus ergiebt sich im obigen Falle

𝔄 𝔅

𝔅 1. 4. | 6. 8. 10
1. 5. 8. 10
1. 4. 7. 10 } u. s. w.
1. 4. 6. 9
1. 5. 9
n. s. w.

A B

2. | 4. | 6. 8. 10
B 3. | 6. 8. 10
2. 5. 8. 10
2. 4. 7. 10
3. 7. 10 } u. s. w.
2. 4. 6. 9
3. 6. 9
2. 5. 9
u. s. w.

Erstrer Ausdruck giebt den Zähler, letztrer den Nenner.

Betrachtet man die hier vorliegende Lösung unsres Problems, so ist erstens ersichtlich, dass die Benützung der Lokalzeichen auch nicht den geringsten Vortheil bringt; dass vielmehr die bei jeder wirklichen, nicht blos fingirten Berechnung unumgänglich nothwendige Umsetzung derselben in Buchstaben-, resp. Zahlenausdrücke eine völlig zwecklose Umständlichkeit im Gefolge hat. Aber auch ausserdem ist die Bildung der Involutionen nichts weniger als durchsichtig, und die von Hindenburg oben angeführte Aeusserung über Euler's Verfahren dürfte wohl auch für das seinige gelten.

Eine zweite Auflösung Hindenburg's trifft im Wesentlichen mit der vorigen zusammen, nur dass lediglich die Zähler independent hergestellt, die Nenner hingegen aus diesen abgeleitet werden. „Man mache,“ heisst es [18]) „die Involution γ für den Zähler, wie in VIII); aus dieser leite man die Involution δ für den Nenner her, indem man (wie in II) überall in den Complexionen,

wo im Zähler steht 1 . 4 und 1 . 5
für den Nenner setzt: (2 . 4 + 3) „ 2 . 5
alle übrige Faktoren aber der Complexionen des Zählers γ, auch für den Nenner δ unverändert beibehält.“ Offenbar steht diese Methode selbst der vorigen bedeutend nach.

Noch geringren Anspruch auf wirkliche Independenz kann folgendes Verfahren machen. Da die Complexionen des Zählers stets mit 1 . 4, die des Nenners mit 1 . 5 beginnen, so drückt man jene zusammen durch 1 . 4 $\mathfrak{S}$, diese durch 1 . 5 Σ aus, und erhält so folgende „geschmeidige combinatorische Formel“

$$\text{zvn} = \frac{1 . 4\, \mathfrak{S} + 1 . 5\, \Sigma}{(2 . 4 + 3)\, \mathfrak{S} + 2 . 5\, \Sigma}$$

Immerhin scheint der Autor gefühlt zu haben, dass diese drei Methoden durchaus noch keine genügende Lösung des gestellten Problems seien; er giebt deshalb noch eine „vierte allgemeinste Auflösung: Zerlegung des Zählers und Nenners in Faktoren aller Art.“ Er geht hier wiederum von der schon früher angegebenen Involution aus, welche er in einer übersichtlicheren und anschaulicheren Weise darstellen lehrt. Behält man die früheren Bezeichnungen bei, so ist der mte Werth $M = 1 . 4\, \mathfrak{S} + 1 . 5\, \Sigma$, und ebenso $M^{-1} = 1 . 4\, \mathfrak{S}^{-1} + 1 . 5\, \Sigma^{-1}$, „wo also die Complexionen bis auf 2m und 2m — 1 für $\mathfrak{S}$ und Σ, und bis auf 2m — 2 und 2m — 3 für $\mathfrak{S}^{-1}$ und Σ^{-1} müssen entwickelt werden. Das giebt also den nten Werth des Bruchs nicht blos aus den beyden letzten (n — 1)ten und (n — 2)ten, sondern allgemeiner vermittelst des mten und (m — 1)ten Werths, d. i.“

$$\text{zvn} = \frac{\left(\begin{array}{l} [1 . 4\, \mathfrak{S} + 1 . 5\, \Sigma] . [2m + 2]\, S \\ + [1 . 4\, \mathfrak{S}^{-1} + 1 . 5\, \Sigma^{-1}] . [2m + 1] . [2m + 4]\, S \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l} [(2 . 4 + 3)\, \mathfrak{S} + 2 . 5\, Z] . [2m + 2]\, S \\ + [(2 . 4 + 3)\, \mathfrak{S}^{-1} + 2 . 5\, \Sigma^{-1}] . [2m + 1] . [2m + 4]\, S \end{array}\right)}$$

Unter $[^4]$ S, $[^6]$ S . . . [2m] S versteht man jene Faktoren der obigen Involution, welche 4, 6, . . . 2m an der Spitze haben und abgesondert werden können. Selbstverständlich sind alle in dieser Formel vorkommende Zahlen ausschliesslich Lokalzeichen.

Ganz abgesehen von der auch wieder ganz nutzlosen Anwendung der im wirklichen Verwendungsfalle doch unbrauchbaren Lokalzeichen

weist dieses Verfahren zwei bedeutende Nachtheile anf. Einmal nämlich ist dazu vorerst die Bildung jener combinatorischen Involution nöthig, sodann werden Zähler und Nenner nicht auf vollständig unabhängige Weise gebildet, sondern der letztre aus dem erstren abgeleitet — ein Verfahren, welches der Allgemeinheit bedeutenden Eintrag thut.

Hindenburg wendet seine Methode auf die Darstellnng des in Lokalzeichen ausgedrückten allgemeinen Kettenbruches

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \ldots$$

an. Geht man von der Formel

$$zvn = \frac{1 \, . \, 4 \, \mathfrak{S} + 1 \, . \, 5 \, \Sigma}{(2 \, . \, 4 + 3) \, \mathfrak{S} + 2 \, . \, 5 \, \Sigma}$$

aus und bildet die Involution, so ergiebt sich

$$\mathfrak{S} = 6 \, . \, 8 \, . \, 10 + 6 \, . \, 9$$
$$\Sigma = 8 \, . \, 10 + 9$$

also, wenn man mit den Symbolen wie mit Zahlen rechnet,

$$\mathfrak{S} = 396$$
$$\Sigma = 34$$

und hieraus

$$zv5 = \frac{\mathfrak{E}}{E} = \frac{27 \, . \, 396 + 39 \, . \, 34}{43 \, . \, 396 + 52 \, . \, 34} = \frac{12018}{18796} = \frac{6009}{9398} = 0{,}6393915\ldots$$

In Lokalzeichen wäre sonach in der That die Anfgabe gelöst, allein da die Mathematik so wenig mit Lokalzeichen, als mit combinatorischen Zeichen andrer Art zu rechnen gewohnt ist, so wäre noch die Rückübersetznng dieser Symbole in die gewöhnlichen Ausdrücke der Buchstabenrechnnng erforderlich. Da eine Anweisung hiezu nicht ertheilt wird, so kann man auch anf Hindenbnrg's Methoden das Urtheil anwenden, welches er selbst (s. o.) über Euler's Algorithmus gefällt hatte.

Hindenburg stellte nicht nur selbst Untersuchungen über das Problem der Näherungswerthe an, sondern er veranlasste auch verschiedene seiner Schüler, diesem Gegenstande ihre Anfmerksamkeit zu widmen. Man glanbte damals bekanntlich in der combinatorischen Analysis ein Universalmittel zur Hebung aller Schwierigkeiten gefunden zn haben; es entstanden die Untersuchnngen von Klügel und Pfaff über die Potenzirung des Polynoms, bezüglich Infiniti-

noms; die schon früher viel bearbeitete Aufgabe der Reihenumkehrung ward von Eschenbach und Rothe auf's Neue aufgenommen [19]) und auch die independente Darstellung der Näherungswerthe eines Kettenbruchs, zu welcher scheinbar Euler's Analyse nicht ausgereicht hatte, wurde der Gegenstand der eifrigen Bemühungen dreier junger Mathematiker aus Hindenburg's Schule. Der eine derselben, der später als Astronom bekannt gewordene Burckhardt, hat sein Verfahren in einer eigenen Schrift [20]) bekannt gemacht; die Gesammtresultate ihrer Forschungen sind niedergelegt in Hindenburg's oben citirter Abhandlung.

Burckhardt's Verfahren ist dem Grundgedanken nach ganz das seines Lehrers. Indem er von dem in Lokalzeichen geschriebenen allgemeinen Kettenbruch ausgeht, nimmt er zuerst alle geraden Zahlen von 4 bis 2n als „Haupt und einzige Complexion der ersten Classe" an, setzt hierauf in dieser Complexion für 4 und 6 die zwischenfallende ungerade 5, statt 6 und 8 die zwischenfallende 7 und so weiter fort, mit Beibehaltung aller übrigen Zahlen, bis man schliesslich zwischen $2n - 2$ und $2n$ die zwischenfallende $2n - 1$ substituirt hat. Ist also

$$4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10 \,\ldots\, (2n - 2) \,.\, 2n$$

die einzige Complexion der ersten Classe, so bilden die Complexionen zweiter Classe folgende Reihe:

$$\begin{array}{l}
5 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, 12 \,\ldots\, (2n - 2) \,.\, 2n \\
4 \,.\, 7 \,.\, 10 \,.\, 12 \,\ldots\, (2n - 2) \,.\, 2n \\
4 \,.\, 6 \,.\, \;\,9 \,.\, 12 \,\ldots\, (2n - 2) \,.\, 2n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
4 \,.\, 6 \,.\, \;\,8 \,.\, 12 \,\ldots\, (2n - 4) \,.\, (2n - 1)
\end{array}$$

Aendert man jede der hier stehenden Complexionen ganz in der nämlichen Weise wie oben, indem man nur die Vertauschung mit dem unmittelbar auf die einzige ungerade Zahl der Complexion folgenden Terme beginnt, so erhält man die dritte Complexionsclasse, und so weiter fort jede beliebige Classe. Man erhält so den Zähler in seinen verschiednen Lokalzeichen-Complexionen ausgedrückt. Sucht man des allgemeinen Kettenbruchs 8ten Näherungsbruch, so verfährt man folgendermassen [21]):

1.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16	Classe I.
	1.	5.	8.	10.	12.	14.	16	
	1.	4.	7.	10.	12.	14.	16	
	1.	4.	6.	9.	12.	14.	16	Classe II.
	1.	4.	6.	8.	11.	14.	16	
	1.	4.	6.	8.	10.	15.	16	
	1.	4.	6.	8.	10.	12.	15	
		1.	5.	9.	12.	14.	16	
		1.	5.	8.	11.	14.	16	
		1.	5.	8.	10.	13.	16	
		1.	5.	8.	10.	12.	15	
		1.	4.	7.	11.	14.	16	Classe III.
		1.	4.	7.	10.	13.	16	
		1.	4.	7.	10.	12.	15	
		1.	4.	6.	9.	13.	16	
		1.	4.	6.	9.	12.	15	
		1.	4.	6.	8.	11.	15	
			1.	5.	9.	13.	16	
			1.	5.	8.	12.	15	Classe IV.
			1.	5.	8.	11.	15	
			1.	4.	7.	11.	15	
				1.	5.	9.	13	Classe V.

Der Nenner wird aus dem Zähler abgeleitet oder auf eine ganz ähnliche Weise unabhängig von diesem bestimmt.

Die Methode Burckhardt's, welche ganz gewissen andren combinatorischen Verrichtungen, z. B. dem Verfahren bei Darstellung der Combinationen zu bestimmten Summen im Discerptionsproblem, nachgebildet ist, hat unläugbare Vortheile vor denen Hindenburg's, ist jedoch ebenfalls nicht independent. Wäre es möglich, irgend eine Complexionsclasse sofort anzuschreiben, ohne alle vorhergehenden bilden zu müssen, so könnte man dasselbe wohl gewissermassen ein independentes nennen, obwohl selbst in diesem Falle die zur Darstellung der Näherungswerthe aufgestellte Regel kein Gesetz zu nennen wäre.

Die Auflösungen Rothe's [22]) führen im Ganzen den nämlichen Weg; nur dass besonders seine „erste Auflösung: Gut geordnete, von einander unmittelbar abhängige Complexionen“ viel schleppender, als diejenige Burckhardt's ist. Nur unbedeutend von der ersten verschieden ist die „zweite Auflösung: Umgekehrt gut geordnete, von einander unmittelbar abhängige Complexionen.“ Schliesslich folgt noch eine „dritte Auflösung: Zusammensetzung der Com-

plexionen durch Schreiben der Lokalzeichen in die Tiefe, oder nach vertikalen Reihen." Es wird hier, im Anschluss an den Bruch

$$0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4 + \ldots}}$$

folgende Tafel gebildet:

Zähler		⊙	Nenner	
1	0	1	2	3
3	2	1	4	5
5	4	2	6	7
7	6	3	8	9
9	8	5	10	11
11	10	8	12	13
13	12	13	14	15
15	14	21	16	17
17	16	34	18	19
19	18	55	20	21
21	20	89	22	23

„Jede Zahl in der Colonne ⊙, ist die Summe der beyden nächstvorhergehenden, und zeigt zugleich die Anzahl der Complexionen in den bestimmten Werthen der Brüche an." Geht man dann wieder von der ersten Complexion 10. 8. 6. 4. 2. 0 aus, um z. B. den 5ten Näherungswerth zu finden, so werden aus dieser die Anfangszahlen jeder Vertikalreihe des Zahlenschemas genommen, dessen Aufstellung jedes combinatorische Verfahren als Endziel erstrebt. Die Columne ⊙ giebt an, wie oft jede Zahl in jeder einzelnen Verticalreihe vorkommen darf, und unterstützt demnach die Berechnung bedeutend; gleichwohl ist die ganze Methode kaum etwas anderes als ein allerdings sehr geregeltes Zusammensuchen.

Die beste und einfachste Methode ist entschieden die von Töpfer[23]), welche darauf ausgeht, eine möglichst direkte und unabhängige Darstellung der Näherungswerthe zu ermöglichen; da sie von den oft bis zum Uebermasse weitläufigen Schemabildungen viel freier ist, als die übrigen, so nennt sie Hindenburg[24]) selbst „das am meisten abweichende Verfahren." In der Kürze dargestellt ist sie folgende.

Hat man den Kettenbruch

$$\frac{a}{1} + \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{1} + \frac{\gamma}{1} + \dots$$

so bildet man für den $\begin{Bmatrix}\text{Zähler}\\ \text{Nenner}\end{Bmatrix}$ des gesuchten Werthes aus den Elementen $\begin{Bmatrix}2, 3, 4, 5, 6 \dots n-1\\ 1, 2, 3, 4, 5 \dots n-1\end{Bmatrix}$ sämmtliche Unionen, Binionen, Ternionen etc. ohne Wiederholung, wobei die kleinste Differenz irgend zweier Elemente höchstens 2 sein darf. Hat man dagegen den Kettenbruch

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \dots$$

so bildet man, wenn n $\begin{Bmatrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{Bmatrix}$ ist, für den Zähler successive aus den Elementen 2, 3, 4, 5 ... n alle $\begin{Bmatrix}0, 2, 4, 6 \dots n-1\\ 1, 3, 5, 7 \dots n-1\end{Bmatrix}$ tionen und nimmt aus diesen zur Bildung des Zählers sämmtliche Combinationen heraus, welche, von der Linken nach der Rechten gezählt, resp. in den geraden und ungeraden Stellen ungerade und gerade Zahlen stehen haben. Entsprechend ist die Bildung des Nenners, nur dass hier alle $\begin{Bmatrix}1, 3, 5, 7 \dots n\\ 0, 2, 4, 6 \dots n\end{Bmatrix}$ tionen gebildet werden müssen, je nachdem n $\begin{Bmatrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{Bmatrix}$ ist.

Hat man endlich den ganz allgemeinen Kettenbruch

$$\frac{a}{a} + \frac{\alpha}{b} + \frac{\beta}{c} + \frac{\gamma}{d} + \dots$$

so ergiebt sich folgende „Auflösung. Man mache die Complexionen für Zähler und Nenner, nach den Vorschriften in I und II, beyde für den gesuchten Werth n in III. Die so gefundenen Complexionen der beyderlei Zähler und so auch der Nenner, in der Ordnung und Lage, wie sie hier in I und II stehen, setzt man Glied für Glied, wie Faktoren neben einander: so erhält man dadurch den Zähler und Nenner des gesuchten nten Werthes für III."

Ohne Zweifel ist diese Auffassung des Problems allen andren vorzuziehen, und es ist nur zu wundern, dass ein verhältnissmässig so elegantes

Verfahren so wenig benützt wurde, während die so ungleich schwerfälligere Darstellnng vermittelst der Involutionen so sehr Eingang fand. Soll in irgend einem praktischen Fall ein Näherungswerth wirklich gefunden werden, so wird das Töpfer'sche Verfahren von den hier diskutirten gewiss am brauchbarsten sein; von all den übrigen möchte das nämliche Bedenken gelten, welches Grunert [25]) von der ebenfalls aus der combinatorischen Analysis hervorgegangenen Lokalformel Rothe's zur Reihenreversion folgendermassen ausdrückt: „ob diese ganz allgemeine Formel zur wirklichen Berechnung öfters angewandt ist?" Jedenfalls hat Hindenburg, so hohen Werth er auch auf seine und seiner Schüler Methoden legt, gefühlt, dass das gesteckte Ziel nicht vollständig erreicht sei; wenigstens scheint dieser Sinn in den folgenden Worten [26]) zu liegen, worin er alles über seine „Vorschrift" Gesagte recapitulirt: „Sie zeigt, wie man bey solchen Darstellungen zwar von vorhergehenden Werthen auf folgende, und in so fern dependent von jenen auf diese fortgeht; aber die ganz eigene Art von Zusammensetzung, nach welcher man vorhergehende, und folgende Werthe in und um einander schreibt, lehrt auch, dass diese Dependenz mit einer absoluten Independenz vollkommen gleichgültig sey, weil man hier für jeden verlangten Werth, blos das für ihn unumgänglich Nöthige thnt und nichts schreibt, was nur etwa als Vorbereitung dienlich wäre, nicht aber selbst zn der Sache, die man sucht, gehörte.

In dieser Rücksicht (wie ich auch durchgängig gethan habe) kann man diese und andere ähnliche Darstellnngen, als ganz independente betrachten und ansehen. Man kann nämlich für jeden ansser der Ordnung verlangten Werth, die Involution, ohne alle vorgängige Vorbereitnng, sogleich einleiten, und selbige auf einem, eben so leicht als geschwind zum Ziele führenden Wege vollenden." Ob die hier vorgetragnen Ansichten wahrhaft strenge Criterien für die Independenz eines analytischen Gesetzes an die Hand zu geben im Stande sind, dürfte zu bezweifeln sein.

16) Hindenburg, Combinatorisches Verfahren, zu Bestimmung der Werthe der continuirlichen Brüche, Leipziger Magazin für Naturkunde und Mathematik, 1781. S. 461; 1782, S. 439.

17) Hindenburg, Ueber combinatorische Involutionen und Evolutionen, und ihren Einfluss auf die combinatorische Analytik, Archiv der reinen und angewandten Mathematik, 1795. I. S. 13.

18) Hindenburg, Combinatorische Verfahren, zu Bestimmnng der Werthe der continuirlichen Brüche, in und ausser der Ordnung, Ibid. S. 56.

19) Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis, nebst einigen verwandten und andern Sätzen, neu bearbeitet und dargestellt, von Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg; nebst einem kurzen Abrisse der combinatorischen Analysis — von C. F. Hindenburg, Leipzig 1796.

20) Burckhardt, Methodns combinatorio-analytica, evolvendis fractionnm continnarum maxime idonea, Lipsiae 1794.

21) Hindenbnrg. Comb. Verf. S. 177.

22) Id. Ibid. S. 162, S. 166, S. 171.

23) Id. Ibid. S. 178.

24) Id. Ibid. S. 183.

25) Grunert, Archiv der Mathematik nnd Physik, XIII. Theil, Literarischer Bericht, S. 702.

26) Hindenburg, Mehrere grosse Mathematiker sind der Erfd. comb. Inv. etc. S. 324.

5. Die von Hindenburg und seiner Schule gegebenen Vorschriften verschafften sich bald allgemeine Geltung; das erste grössere Lehrbuch, welches die gesammte Lehre von den Kettenbrüchen enthält, das von Eytelwein[27]), giebt auch in einer conciseren und übersichtlicheren Weise als Hindenburg eine involutorische Darstellung der Näherungswerthe. Sind N, N_1, N_2 etc. die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche des Kettenbruchs

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2 + \ldots}$$

so kann man folgendes von Hindenburg bereits angedeutete Schema construiren:

	N	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
	α	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	. . .
N_1								
		α	α_2	α_3	a_4	a_5	a_6	. . .
N_2								
		α	α_1	α_3	α_4	a_5	a_6	. . .
N_3								
		α	a_1	a_2	α_4	a_5	a_6	. . .
			α	α_2	α_4	a_5	a_6	. . .
N_4								
		α	a_1	a_2	a_3	α_5	a_6	. . .
			α	α_2	a_3	α_5	a_6	. . .
			α	α_1	α_3	α_5	a_6	. . .
N_5								
		α	a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	. . .
			α	α_2	α_3	α_4	α_6	. . .
			α	a_1	α_3	a_4	α_6	. . .
			α	a_1	a_2	α_4	α_6	. . .
				α	α_2	α_4	α_6	. . .
N_6								
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Dieses Schema lässt sich beliebig weiter fortsetzen, „wenn man neben den vertikalen Strich, den nächstfolgenden Nenner des Ergänzungsbruches, und unter den wagerechten Strich, sämmtliche im zweyten nächstvorgehenden Winkelhaken enthaltene Grössen, nach eben der Ordnung, hinschreibt, und solchen auf der rechten Seite den nächstfolgenden Zähler des Ergänzungsbruches als Faktor, zusetzt.“

Auch Stern [28]) bedient sich eines ähnlichen Schema's, um ein independentes Gesetz herzustellen. Hat man den Kettenbruch

$$a + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}}$$

so hat man zur gemeinschaftlichen Darstellung des Zählers wie Nenners nur das Tableau

a	a_1	a_2	a_3	a_4
a	a_1	a_2		b_4
a	a_1	b_3		a_1
a	b_2		a_3	a_4
a	b_2			b_4
b_1		a_2	a_3	a_4
b_1			a_2	b_4
b_1		b_3	b_3	b_4

zu bilden, aus dem sich unmittelbar das Gesetz des Fortgangs erkennen lässt; es ist z. B. der vierte Näherungswerth

$$F(a,a_4) = \frac{a\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 + a\, a_1\, b_3\, a_4 + a\, a_1\, b_3\, a_4 + a\, b_2\, a_3\, a_4 + a\, b_2\, b_4 + b_1\, a_2\, a_3\, a_4 + b_1\, a_2\, b_4 + b_1\, b_3\, a_4}{a_1\, a_2\, a_3\, a_4 + a_1\, a_2\, a_4 + a_1\, b_3\, a_4 + b_2\, a_3\, a_4 + b_2\, b_4}$$

Die von Stern gegebene Vorschrift ist offenbar von allen, welche wir bis jetzt kennen gelernt haben, die einfachste und bequemste; auch wird sie nicht blos als ein eleganter Kunstgriff ohne Anwendung hingestellt, sondern Stern benützt sie zur Bestimmung der Gliederzahl jedes Aggregates, durch welches Zähler und Nenner eines Kettenbruches dargestellt werden [29]).

Immerhin fehlt diesen sämmtlichen Methoden, abgesehen von der wenig zweckmässigen Bezeichnungsweise, noch ein Hauptcharakteristikum eines wirklich independenten Gesetzes. Betrachten wir einen beliebigen endlichen Kettenbruch, so ergiebt schon der blosse



Anblick, dass sich derselbe nach den gewöhnlichen recurrirenden Weisen, sowohl von vorne als von hinten, mit gleicher Bequemlichkeit berechnen lassen müsse, und zwar findet sich diess durch die Praxis bestätigt. Lejeune-Dirichlet hat in seinen Vorlesungen über Zahlentheorie sogar gezeigt, dass es mitunter weit bequemer sei, in letztrer Weise zu operiren [30]). „Soll", heisst seine Regel, „der rte Näherungsbruch berechnet werden, so stelle zunächst die Quotienten, von hinten nach vorn genommen, vom rten an bis zum ersten der Reihe nach in einer horizontalen geraden Linie von links nach rechts auf; bilde eine zweite horizontale Reihe darunter, in welcher α_r unter α_r und vor diesem noch die Zahl 1 zu stehen kommt, auf die Weise, dass jedes folgende Glied entsteht, indem man den darüber befindlichen Quotienten mit dem nächst vorangehenden Gliede der zu bildenden Reihe multiplicirt und zum Produkte das zweit vorangehende Glied dieser Reihe addirt. Alsdann ist das vorletzte Glied dieser Reihe der Zähler A_r und das letzte der Nenner B_r des verlangten Näherungsbruches." Während es demnach als ein sichres Kennzeichen eines wahrhaft unabhängigen und zweckmässigen Verfahrens erscheint, die wirkliche Berechnung des aufgestellten Ausdrucks mit gleicher Bequemlichkeit von beiden Seiten her beginnen zu können, gestatten alle die vermittelst combinatorischer Involutionen gewonnenen allgemeinen Ausdrücke nur die eine Berechnungsweise.

Die Schwierigkeit, wahrhaft independente Gesetze zu finden, scheint manche Schriftsteller vermocht zu haben, die Aufstellung solcher Ausdrücke überhaupt zu umgehen und sich lediglich mit in Worten ausgedrückten Regeln zu begnügen. So giebt z. B. Lieblein [31]) folgende Regel, den nten Näherungsbruch $\frac{p_n}{q_n}$ des allgemeinen Kettenbruches

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}}$$

zu finden: Um p_n zu erhalten, gehe man von dem Gliede $a_2 a_3 a_4 \ldots a_n b_1$ aus und ersetze in diesem $a_2 a_3$ durch b_3, so erhält man $a_4 \ldots a_n b_1 b_3$ als zweites Glied des Ausdrucks. Nun ersetze man $a_3 a_4$ durch b_4, wodurch man das dritte Glied $a_2 a_5 \ldots a_n b_1 b_4$ findet. In den bereits gefundenen Gliedern ersetze man ferner $a_4 a_5$ durch b_5, dann in sämmtlichen bereits gebildeten, wo es angeht,

$a_5 a_6$ durch b_6 u. s. f., bis man zuletzt in allen Gliedern, wo es angeht, $a_{n-1}\, a_n$ mit b_n vertauscht. Die Summe aller so gefundenen Ausdrücke ist p_n. Auf ähnliche Weise wird q_n gebildet." Das Verfahren ist, wie man sieht, ganz dasselbe wie die oben geschilderten von Burckhardt und Rothe.

Noch in neuester Zeit hat Minding [32]) eine Methode angegeben, die Näherungswerthe des in der Dioptrik wichtigen Gauss'schen Kettenbruches zu bestimmen. Hat man den Kettenbruch

$$u^0 + \cfrac{1}{t' + \cfrac{1}{u' + \cfrac{1}{t'' + \cfrac{1}{u'' + \ldots}}}}$$

wo $k = (u^0, t', u', t', u'') + \ldots$, so empfiehlt sich zur Bildung des Ausdrucks folgendes allgemeine Gesetz: „Unter der Voraussetzung einer ungraden Anzahl von Gliedern bilde man aus den ungraden Stellen derselben (also aus den $u^0, u' \ldots$) alle Combinationen (Unionen, Amben, Ternen etc.), wobei man dieselbe nach steigenden Indices zu ordnen hat, und schiebe zwischen dieselben die Summe der zwischen ihnen liegenden graden Stellen (der $t', t'' \ldots$) ein. Die Summen der so gebildeten Glieder constituiren den Werth des Kettenbruchs." Alle Zeichen haben die bekannte, von Gauss [33]) eingeführte Bedeutung. Diese Methode ist, selbst im Wortausdruck, nahezu identisch mit derjenigen von Töpfer (s. o.).

Unter diesen combinatorischen Darstellungen wäre schliesslich noch aufmerksam zu machen auf die von Bartholomaei [34]). Unter einer „alternirenden Combination versteht man eine solche, in welchen eine Klasse — das Wort im weiteren Sinne, nämlich auch für die Klassen einer Klasse gebraucht — um die andere übersprungen ist." Ist also $\overset{m}{\underset{r\,.\,t}{C}}$ die Gesammtbezeichnung für die alternirenden Combinationen vom rten bis tten Partialnenner, so ergiebt sich der Nenner des 2nten Näherungsbruchs

$$B_{2n} = \frac{\overset{2n}{\underset{1\,.\,2n}{C}} + \overset{2n-2}{\underset{1\,.\,2n}{C}} + \overset{2n-4}{\underset{1\,.\,2n}{C}} + \ldots + \overset{2}{\underset{1\,.\,2n}{C}} + \overset{0}{\underset{1\,.\,2n}{C}}}{\overset{2n-1}{\underset{2\,.\,2n}{C}} + \overset{2n-3}{\underset{2\,.\,2n}{C}} + \overset{2n-5}{\underset{2\,.\,2n}{C}} + \ldots + \overset{3}{\underset{2\,.\,2n}{C}} + \overset{1}{\underset{2\,.\,2n}{C}}}$$

der des $(2n + 1)$ten

$$B_{2n+1} = \frac{\overset{2n+1}{C}_{1.(2n+1)} + \overset{2n-1}{C}_{1.(2n+1)} + \overset{2n-3}{C}_{1.(2n+1)} + \ldots + \overset{3}{C}_{1.(2n+1)} + \overset{1}{C}_{1.(2n+1)}}{\overset{2n}{C}_{2.(2n+1)} + \overset{2n-2}{C}_{2.(2n+1)} + \overset{2n-4}{C}_{2.(2n+1)} + \ldots + \overset{2}{C}_{2.(2n+1)} + \overset{0}{C}_{2.(2n+1)}}$$

Es ist nicht zu leugnen, dass vermittelst dieser neu eingeführten Bezeichnung der allgemeine Ausdruck eine ganz elegante Form erhält; um so schleppender gestaltet sich die wirkliche Auswerthung in praktischen Fällen.

Auch noch an einem andren Orte [35]) hat schliesslich Minding sein Verfahren veröffentlicht; es lässt sich [36]) dahin zusammenfassen: „Um $(u_0 . t_1 u_1 . t_2 u_2 \ldots t_s u_s)$ zu bilden, formt man die Summe der Produkte der u zu je 1, 2, 3, . . . und multiplicirt jedes u_λ u_μ mit der Summe der zwischen u_λ und u_μ befindlichen t, z. B. $u_0 u_3 u_4 u_7$ mit $(t_1 + t_2)\, t_4\, (t_5 + t_6 + t_7)$."

Erst in neuerer Zeit hat man angefangen, einem combinatorischen Symbol Vertranen zu schenken, welches, nachdem sein Gebrauch in kurzer Zeit von schwachen Anfängen bis zu einer ganz neuen analytischen Theorie sich ausgebildet hatte, für Auffindung independenter Gesetze sich besonders günstig zu erweisen schien — den Determinanten. Der grosse Vortheil, den sie darboten, bestand hauptsächlich darin, dass die Rechnung mit Determinanten durchaus keine Schwierigkeiten verursacht und demnach eine Darstellung der Näherungswerthe in Determinantenform nicht nur als unvermittelter Knnstgriff dasteht, sondern anch ein neues Behandlnngsmittel für die ganze Lehre von den Kettenbrüchen gewährt.

27) Eytelwein, Grundlehren der höheren Analysis, Berlin 1824. 1. Band, S. 340.

28) Stern, Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, 1833. 10. Band, S. 5.

29) Ibid. S. 8.

30) Emsmann, Mathematische Excursionen, Halle 1872. S. 106.

31) Lieblein, Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis, Prag 1867. S. 176.

32) Minding, Tageblatt der 44ten Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte, Rostock 1871. S. 50.

33) Gauss, Dioptrische Untersuchungen, Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 1. 1843.

34) Bartholomaei, Grunert's Archiv XVIII. Theil, S. 328.

35) Minding, Loi de la formation des dénominateurs et des numérateurs pour la reduction des fractions continues en fractions ordinaires, Bull. de St. Petersbourg, XIII. 1869.

36) Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik, 2. Band. Heft 1. Berlin 1872. S. 105.

6. Die erste Idee, die Betrachtungsweise der Lehre von den Kettenbrüchen durch Einführung der Determinanten zu vervollkommnen, scheint dem dänischen Mathematiker Ramus [37] anzugehören.

In dem Memoire, welches er hierüber der dänischen Akademie einreichte, heisst es (deutsch übersetzt): „Herr Professor Ramus theilte nachfolgende Bemerknngen mit zur Anwendung der Determinanten für Aufstellnng von Regeln für convergirende (Ketten-) Brüche.“ Es heisst dann weiter: „Angenommen, es wäre gegeben der Kettenbruch

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}}$$

welcher sich kürzer durch

$$a_0, \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3} \ldots$$

bezeichnen lässt . . . es kommt hierbei nur daranf an, eine Regel zu finden, für die eine dieser zwei Reihen (Zähler und Nenner) . . . Bekanntlich ist y_r allgemein bestimmt durch die zwei vorhergehenden Glieder y_{r-1} und y_{r-2}, vermittelst des bekannten Satzes: $y_r = a_r y_{r-1} + b_r y_{r-2}$, und ebenso z_r, so dass man also die Glieder successive bestimmen kann, wenn der Kettenbruch vorliegt; aber zugleich ergiebt sich in Folge dieser Formel, indem man nacheinander $r = 0, 1, 2 \ldots n$ setzt, ein System von linearen Gleichnngen; in Folge dessen giebt der obige Ausdruck eine allgemeinere Bestimmung für y_r. Die Coëfficienten

$$a^i, a_1^i, a_2^i \ldots a^i_n$$

sind bestimmt durch folgendes Schema — die horizontalen Linien entsprechen dem $i = 0, 1, 2 \ldots n$, während die vertikalen den Coëfficienten für die obenstehend geschriebenen $y_0, y_1, y_2 \ldots$ entsprechen:“

$$
\begin{array}{cccccccc}
y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \; \ldots & y_{n-3} & y_{n-2} & y_{n-1} & y_n \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \; \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a_1 & 1 & 0 & 0 \; \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_2 & -a_2 & 1 & 0 \; \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -b_3 & -a_3 & 1 \; \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 \; \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \; \ldots & -a_{n-2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \; \ldots & -b_{n-1} & -a_{n-1} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \; \ldots & 0 & -b_n & -a_n & 1
\end{array}
$$

Dieses Schema könnte offenbar mit Leichtigkeit zu einer Determinante umgestaltet werden, ist jedoch an und für sich noch keine. Ramus stellt auch seine Determinanten nicht in der für die Lehre von den Kettenbrüchen nicht zu umgehenden quadratischen Form dar, sondern schreibt nach alter Weise:

$$
\left.\begin{array}{l}
A_n = - \Sigma \pm a^n a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_{n-1}^{n-1} \\
A^1{}_n = - \Sigma \pm a \; a_1^n a_2^2 a_3^3 \ldots a_{n-1}^{n-1}
\end{array}\right\}
$$

eine Bezeichnungsweise, durch welche er sich des grössten Theiles der Vorzüge, welche die richtige Benützung seines glücklichen Gedankens gebracht hätte, begiebt, so dass im weitren Verlaufe seiner verschiednen Sätzen der Kettenbruchlehre gewidmeten Abhandlung der Nutzen der Determinanten durchaus nicht in das rechte Licht gestellt wird.

Unabhängig von Ramus fand Heine, dass der Nenner (und sonach auch der Zähler) jedes Näherungsbruches in Gestalt einer Determinante dargestelt werden kann.

Painvin [38]) hatte gefunden, dass die Determinante eines gewissen Systems in der Form

$$
\left|\begin{array}{cccccccc}
h_0 & \sqrt{k_0 g_1} & 0 & 0 \; \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sqrt{k_0 g_1} & h_1 & \sqrt{k_1 g_2} & 0 \; \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sqrt{k_1 g_2} & h_2 & \sqrt{k_2 g_3} \; \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{k_2 g_3} & h_3 \; \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 \; \ldots & h_{\sigma-3} & \sqrt{k_{\sigma-3} g_{\sigma-2}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \; \ldots & \sqrt{k_{\sigma-3} g_{\sigma-2}} & h_{\sigma-2} & \sqrt{k_{\sigma-2} g_{\sigma-1}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \; \ldots & 0 & \sqrt{k_{\sigma-2} g_{\sigma-1}} & h_{\sigma-1} & \sqrt{k_{\sigma-1} g_\sigma} \\
0 & 0 & 0 & 0 \; \ldots & 0 & 0 & \sqrt{k_{\sigma-1} g_\sigma} & h_\sigma
\end{array}\right|
$$

dargestellt werden könne, eine Eigenschaft dieses Systems, welche Heine[39]) zur Behandlung gewisser Lamé'scher Funktionen benützt, ohne noch ihren nahen Zusammenhang mit den Kettenbrüchen zu bemerken. Bei einer erneuten Bearbeitung dieser Funktionen ergiebt sich ihm die Determinante[40])

$$
\begin{vmatrix}
k-c_0^2 & kc_0c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
kc_0c_1 & z-c_1^2-c_2^2 & kc_2c_3 & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & kc_2c_3 & z-c_3^2-c_4^2 & kc_4c_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & kc_4c_5 & z-c_5^2-c_6^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & z-c_{2\sigma-7}^2-c_{2\sigma-6}^2 & kc_{2\sigma-6}c_{2\sigma-5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & kc_{2\sigma-6}c_{2\sigma-5} & z-c_{2\sigma-5}^2-c_{2\sigma-4}^2 & kc_{2\sigma-4}c_{2\sigma-3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & kc_{2\sigma-4}c_{2\sigma-3} & z-c_{2\sigma-3}^2-c_{2\sigma-2}^2 & kc_{2\sigma-2}c_{2\sigma-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & kc_{2\sigma-2}c_{2\sigma-1} & z-c_{2\sigma-1}^2-c_{2\sigma}^2
\end{vmatrix}
$$

als Nenner des Kettenbruches

$$
\cfrac{1}{z-c_{2\sigma}^2-c_{2\sigma-1}^2-\cfrac{k^2-c_{2\sigma-1}^2c_{2\sigma-2}^2}{z-c_{2\sigma-2}^2-c_{2\sigma-3}^2-\cfrac{k^2-c_{2\sigma-3}^2c_{2\sigma-4}^2}{\ddots-\cfrac{k^2c_3^2c_2^2}{z-c_2^2-c_1^2-\cfrac{k^2c_1^2c_0^2}{z-c_0^2}}}}}
$$

Allein auch hier wird diese Bemerkung ohne Anwendung gelassen; ohwohl Heine[41]) sehr hald sich wiederum mit den Kettenbrüchen heschäftigte, benützte er doch die Determinanten nicht mehr. Eine kurze hierher gehörige Notiz findet sich auch bei Spottiswoode[42]), ohne dass jedoch irgend ein weitrer Gebrauch von derselben gemacht würde. Es heisst daselbst: „The improper continued fraction

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B - \frac{1}{C - \dots}} = \frac{d}{dA} \log \nabla,$$

where

$$\nabla = \begin{vmatrix} A & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & N \end{vmatrix}$$

in which any number of rows may be taken at pleasure, and the formula will give the corresponding convergent fraction.

The same holds good for the continued fraction

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \dots$$

if we write

$$\nabla = \begin{matrix} A & 1 & 0 & \dots \text{“} \\ -1 & B & 1 & \dots \\ 0 & -1 & C & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

37) Determinanternes Anvendelse til at bestemme Loven for de convergerende Bröker, Det Kong. Danske Vidensk. Selsk, naturv. og math. Afhandl. Kjöbenhavn 1855. S. 106.

38) Heine, Auszug eines Schreibens über die Lamé'schen Funktionen an den Herausgeber, Crelle's Journal. 1859. 56. Band. S. 79.

39) Ibid. S. 80.

40) Heine, Einige Eigenschaften der Lamé'schen Funktionen, ibid. S. 97.

41) Heine, Ueber die Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen, Crelle's Journal, 1860. 57. Band, S. 231.

42) Spottiswoode, Elementary Theorems relating to Determinants, Crelle's Journal, 1856. 51. Band. S. 374.

7. Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass auch Möbius [43]) sich mit der Aufstellung eines independenten Gesetzes beschäftigte. Er gieng nicht von dem gewöhnlichen Kettenbruche aus, dessen sämmtliche Glieder positiv sind, sondern von der Form

$$\frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3 - \ldots}}}$$

welche für seine Zwecke bequemer war. Er bedient sich eines Algorithmus, ganz ähnlich dem Euler'schen. Hauptsächlich war es das Einschalten verschiedener Glieder in den Kettenbruch, worauf er sein Augenmerk richtete; ausserdem bediente er sich noch desselben in einer Abhandlung optischen Inhalts, deren Bestimmung er selbst in folgenden Worten ausspricht: „Zum Schluss habe ich noch die oben gedachten Sätze von den bei jedem Gläsersystem im Allgemeinen angebbaren zwei Brennpunkten und Brennweiten und von den daraus zu berechnenden Wirkungen des Systems, sowie auch die Haupteigenschaften der Fernröhre auf eine neue, der Einfachheit dieser Sätze entsprechende, ganz elementare Weise dargethan" [44]).

43) Möbius, Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen, nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts, Crelle's Journal 1828. 3. Band. S. 215.

44) Möbius, Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern, Crelle's Journal. 1827. 2. Band. S. 113.

Kapitel II.

Darstellung der Zähler und Nenner jedes Näherungsbruches in Determinanten-Form.

8. Bekanntlich hat Scheibner [45]) zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass der einfachste und naturgemässeste Weg, zu den Kettenbrüchen zu gelangen, durch Betrachtung gewisser recurrirender Gleichungen dargeboten wird. Ist eine Anzahl von Termen durch folgende Reihe von Gleichungen verbunden, welche eine Berechnung der Grössen a, b, . . . successive gestatten,

$$
\begin{aligned}
a &= bq + c \\
b &= cr + d \\
c &= ds + e \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

so erhält man

$$\frac{b}{a} = \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \ldots}}}$$

und ebenso, wenn man allgemein hat

$$
\begin{aligned}
p_1 u - q_1 u_1 + u_2 &= 0 \\
p_2 u_1 - q_2 u_2 + u_3 &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

so findet sich

$$\frac{u_1}{u} = \cfrac{p_1}{q_1 - \cfrac{p_2}{q_2 - \cfrac{p_3}{q_3 - \ldots}}}$$

Gesetzt nun, man habe folgendes System von 5 linearen Gleichungen aufzulösen.

$$
\begin{aligned}
ax - y &= A \\
bx + cy - z &= 0 \\
dy + ez - u &= 0 \\
fz + gu - v &= 0 \\
hu + iv &= 0
\end{aligned}
$$

so findet man, dem obigen gemäss, für x den Kettenbruch

$$\cfrac{\frac{A}{a}}{a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e + \cfrac{f}{g + \cfrac{h}{i}}}}}$$

Sucht man andrerseits nach bekannten Regeln [46]) für x seinen Werth als Quotienten zweier Determinanten, so erhält man

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -1 & 0 & 0 \\ 0 & d & e & -1 & 0 \\ 0 & 0 & f & g & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & -1 & 0 & 0 \\ 0 & d & e & -1 & 0 \\ 0 & 0 & f & g & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h & i \end{vmatrix}}$$

Setzen wir die beiden für x erhaltenen Werthe einander gleich, so ergiebt sich uns induktorisch sofort folgender

Lehrsatz. Ist p_n der Zähler, q_n der Nenner des nten Näherungsbruches des Kettenbruchs

$$\frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \frac{b_3}{a_3} + \dots$$

so ist stets, unter M, N . . S beliebige Zahlen verstanden,

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & M & N & P \dots & S \\ 0 & a_2 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \,.\,.\, a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \,.\,.\, b_n & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \,.\,.\, a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \,.\,.\, b_n & a_n \end{vmatrix}}$$

Beweis. Derselbe ist nur für den Nenner zu führen, indem derjenige für den Zähler ganz analog ist. Bekanntlich hat man, um auf recurrirende Weise den Zähler und Nenner des nten Näherungsbruches zu finden,

$$p_n = a_n \, p_{n-1} + b_n \, p_{n-2}$$
$$q_n = a \;\; q_{n-1} + b_n \, q_{n-2}$$

Der obigen Darstellungsweise entsprechend ist nun offenbar

$$q_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \,.\,.\, a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \,.\,.\, b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} \qquad q_{n-2} = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \,.\,.\, a_{n-3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \,.\,.\, b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

Zerlegt man hingegen die oben für q_n hypothetisch angenommene Determinante anf bekannte Weise [47]) in Unterdeterminanten, so erhält man sofort, unter $\triangle$ die supponirte Determinante des Nenners verstanden,

$$\triangle = a_n \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} + b_n \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots a_{n-3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

nnd mit Berücksichtigung der vorigen Relationen,

$$\triangle = a_n q_{n-1} + b_n q_n$$

Dem Comperationsgrundsatze gemäss ist nun also

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots b_n & a_n \end{vmatrix} = q_n \dots . A$$

Ist somit der Satz für den (n—2) ten und (n - 1) ten Nenner wahr, so gilt er anch für den n ten, nun ist aber

$$a_1 = a_1$$
$$a_1 a_2 + b_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

sonach ist die allgemeine Gültigkeit nnsres Theorems erwiesen. Anstatt der oben willkürlich angenommnen Terme M, N . . . S werden wir in der Folge gewöhnlich 0 setzen, was nach einem bekannten Satze [48]) der Lehre von den Determinanten gestattet ist.

In ähnlicher Weise findet sich die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Unbekannten dnrchgeführt bei Kötteritsch [49]); da aber dort von unendlich vielen Gleichungen die Rede ist, würden die Determinanten unendlich werden.

45) Scheibner, Einige Bemerkungen über recurrirende Gleichungen,

Günther, Darstellung der Näherungswerthe. 3

welche auf Kettenbrüche führen, Berichte der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften 1864. S. 44.

46) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1870. S. 64.

47) Ibid. S. 27.

48) Ibid. S. 9.

49) Kötteritsch, Ueber die Auflösung eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen, Schlömilch, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 15. Jahrg. S. 238.

9. Die hier gegebne Determinante, welche wir in der Folge mit dem Namen „Kettenbruchdeterminante" bezeichnen wollen, zeichnet sich durch ihre vielfache Verwendbarkeit aus, indem sie sich ohne weiteres in verschiedne Formen bringen lässt, je nach dem speciellen Zweck der Untersuchung. Zunächst ist klar, dass die Terme $b_2\ b_3 \ldots b_n$ mit den ihnen gegenüberstehenden negativen Einheiten beliebig vertauscht, oder selbst negativ genommen werden können, wofür dann die Einheit das positive Vorzeichen erhält. So ist z. B. unsre Determinante, welcher wir den Namen der „Normalform" beilegen können, gleich der folgenden

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -b_2 & a_2 & b_3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & -b_4 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -b_n & a_n \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots B$$

Ferner ist klar, dass wir ihr auch die folgende Gestalt geben dürfen

$$\begin{vmatrix} a_1 & M & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ N & a_2 & P & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Q & a_3 & R & \ldots & 9 \\ 0 & 0 & S & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & a_{n-1} & Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & Z & a_n \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots C$$

wofern nur folgende Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} MN &= -b_2 \\ PQ &= -b_3 \\ RS &= -b_4 \\ &\vdots \\ YZ &= -b_n \end{aligned}$$

Die eleganteste Form wird unsre Kettenbruchdeterminante offenbar dann annehmen, wenn wir stets die beiden Faktoren M, N...Y, Z entgegengesetzt gleich werden lassen, also $M = -N = \sqrt{b_2} \ldots$ $Y = -Z = -\sqrt{b_n}$ voraussetzen. Wir erhalten alsdann den Nenner in der Gestalt, wie ihn Heine (s. o.) bereits in einem speciellen Falle dargestellt hat, nämlich in der folgenden

$$\begin{vmatrix} a_1 & -\sqrt{b_2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \sqrt{b_2} & a_2 & -\sqrt{b_3} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{b_3} & a_3 & -\sqrt{b_4} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b_4} & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_{n-1} & & -\sqrt{b_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \sqrt{b_n} & & a_n \end{vmatrix} \ldots\ldots D$$

Diese Determinante ist besonders deshalb wichtig, weil sie eine sogenannte „gauche symmetrique“ ist, bei welcher allgemein

$$a_{ki} = -a_{ik}$$

ist [50]). Wir wollen im Folgenden statt dieses wenig bezeichnenden Namens für diese Determinanten mit Studnička [51]) uns des Ausdrucks: „symmetrale Determinanten“ bedienen.

Diese Determinante lässt sich mit Leichtigkeit auch in eine solche verwandeln, deren Diagonalglieder, ohne dass sie darum aufhört, eine symmetrale zu sein, sämmtlich unter sich gleich sind. Es bedarf hiezu nur des Satzes [52]), dass man in jedem Kettenbruche, ohne seinen Werth zu ändern, einen beliebigen Theilzähler, den darauf folgenden Theilnenner und den wiederum auf diesen folgenden Theilzähler mit einem und demselben beliebigen Ausdruck multipliciren oder dividiren darf. Dieser Satz ist auch auf gewöhnlichem Wege leicht zu beweisen; jedoch ist es als ein wesentlicher Nachtheil zu bezeichnen, dass man, wie Stern [53]) ausdrücklich hervorhebt, den Beweis für endliche und unendliche Kettenbrüche getrennt führen muss; hat man jedoch den Kettenbruch als

Quotienten zweier endlicher oder unendlicher Determinanten ausgedrückt, und soll vom rten Theilzähler ab die genannte Operation vorgenommen werden, so gebe man diesem Quotienten folgende Form (B), wo P jede Zahl (ausgenommen 0) sein kann

$$\frac{P.\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & b_{r-1} & a_{r-1} & b_r & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_r & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\; b_n & a_n \end{vmatrix}}{P.\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & b_{r-1} & a_{r-1} & b_r & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_r & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\; b_n & a_n \end{vmatrix}} \quad \text{I.}$$

und da bekanntlich eine Determinante dadurch mit einer Zahl multiplicirt wird, dass man eine ihrer horizontalen oder vertikalen Reihen mit der Zahl multiplicirt [54]), so kann man den vorigen Quotienten auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & Pb_{r-1} & Pa_{r-1} & Pb_r & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_r & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\; b_n & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & Pb_{r-1} & Pa_{r-1} & Pb_r & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_r & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\; b_n & a_n \end{vmatrix}} \quad \text{II.}$$

Aus I. und II. ergiebt sich aber unmittelbar folgende Relation:

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\dots+\cfrac{b_{r-1}}{a_{r-1}+\cfrac{b_r}{a_r+\dots+\cfrac{b_n}{a_n}}}}} = \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\dots+\cfrac{Pb_{r-1}}{Pa_{r-1}+\cfrac{Pb_r}{a_r+\dots+\cfrac{b_n}{a_n}}}}}$$

einerlei, ob n endlich ist oder nicht.

Mit Hülfe dieses Satzes ist es nun leicht, eine Determinante der geforderten Art herzustellen. Denn wir sehen sofort, dass, wenn wir z. B. den Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\dots+\cfrac{b_n}{a_n+\dots}}}}$$

in einen andren verwandeln wollen, dessen sämmtliche Theilnenner alle $= P$ sind, so ergiebt uns eine einfache successive Division, dass dieser Kettenbruch dem folgenden

$$\cfrac{b_1\frac{P}{a_1}}{P+\cfrac{b_2\frac{P^2}{a_1 a_2}}{P+\cfrac{b_3\frac{P^2}{a_2 a_3}}{P+\dots+\cfrac{b_n\frac{P^2}{a_{n-1} a_n}}{P+\dots}}}}$$

gleich ist. Schreiben wir aber diesen Kettenbruch als Quotienten zweier symmetralen Determinanten, so erhalten wir

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} P & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & P & -P\sqrt{\frac{b_3}{a_2\, a_3}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & P\sqrt{\frac{b_3}{a_2\, a_3}} & P & -P\sqrt{\frac{b_4}{a_3\, a_4}} & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & P\sqrt{\frac{b_4}{a_3\, a_4}} & P & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & P\sqrt{\frac{b_n}{a_{n-1}a_n}} & P \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P & -P\sqrt{\frac{b_2}{a_1\, a_2}} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ P\sqrt{\frac{b_2}{a_1\, a_2}} & P & -P\sqrt{\frac{b_3}{a_2\, a_3}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & P\sqrt{\frac{b_3}{a_2\, a_3}} & P & -P\sqrt{\frac{b_4}{a_3\, a_4}} & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & P\sqrt{\frac{b_4}{a_3\, a_4}} & P & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & P\sqrt{\frac{b_n}{a_{n-1}a_n}} & P \end{vmatrix}} \cdot \cdot \cdot \cdot \; E$$

Diese Determinanten haben nun offenbar alle Eigenschaften einer symmetralen Form.

50) Baltzer, S. 57.

51) Studnička, Einleitung in die Theorie der Determinanten, Prag 1871. S. 47.

52) Stern, S. 14.

53) Ibid. S. 155.

54) Baltzer, S. 13.

10. Sehr leicht ist es, von den hier aufgestellten Formen auf diejenigen überzugehen, welche mitunter in der Praxis vorkommen. Um z. B. für den Kettenbruch

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ldots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

den independenten Ausdruck aufzustellen, hat man nur zu der Form A (Normalform) den Term a_0 zu addiren, der Nenner bleibt folglich ungeändert, während der Zähler der Summe

$$\begin{vmatrix} b_1 & -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & b_n & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1a_0 & -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

gleich ist. Da diese beiden Determinanten mit Ausnahme der ersten Colonne (Vertikalreihe) ganz identisch sind, so kann man sie sofort summiren [55]; als Summe erhält man

$$\begin{vmatrix} b_1 + a_1a_0 & -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

Diese Determinante vom $n$ten Grad lässt sich leicht in eine solche vom $(n + 1)$ten verwandeln. Bezeichnet man nämlich die beiden in der obigen Determinante durch Winkelhaken abgetrennten Determinanten durch M und m, so hat man, wenn R die Determinante selbst bedeutet,

$$R = (b_1 + a_1 a_0) M + a_0 b_2 m$$

Betrachten wir hingegen die Determinante $(n + 1)$ten Grades

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & a_3 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots b_n & a_n \end{vmatrix}$$

so ergiebt sich durch Zerlegung in Unterdeterminanten sofort ebenfalls

$$\triangle = (b_1 + a_1 a_0) M + a_0 b_2 m$$

und hieraus

$$R = \triangle.$$

Derjenige Kettenbruch, dessen sämmtliche Theilzähler negative Zahlen sind, lässt sich stets als Quotient zweier symmetrischer Determinanten darstellen, für welche

$$a_{ik} = a_{ki}$$

st. Man hat

$$\frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3 - \dots - \frac{b_n}{a_n}}}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \sqrt{b_3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{b_3} & a_3 & \sqrt{b_4} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b_4} & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \sqrt{b_n} & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & \sqrt{b_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{b_2} & a_2 & \sqrt{b_3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{b_3} & a_3 & \sqrt{b_4} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b_4} & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \sqrt{b_n} & a_n \end{vmatrix}}$$

Bekanntlich lässt sich jede symmetrale Determinante auch in einer nach ab- oder aufsteigenden Potenzen des Diagonalgliedes fortlaufenden Reihe darstellen [56]). Gehen wir also von der Form E) aus, so erhalten wir den nten Näherungsbruch des Kettenbruchs

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

folgendermassen als Quotienten zweier Polynome dargestellt:

$$\frac{P^n + P^{n-2}\,\Sigma D_2 + P^{n-4}\,\Sigma D_4 + \ldots}{P^n + P^{n-2}\,\Sigma \varDelta_2 + P^{n-4}\,\Sigma \varDelta_4 + \ldots}$$

wobei sowohl D_m als $\varDelta_m$ symmetrale Determinanten mit leerer Diagonale sind. Jede derartige Determinante ist aber stets ein vollständiges Quadrat [57]), so dass also die Coëfficienten von P^q Summen von Quadraten vorstellen. Nimmt man $P = 1$ an, so bekommt der n te Näherungsbruch folgende einfachere Gestalt:

$$\frac{1 + \Sigma^I Q + \Sigma^{II} Q + \ldots}{1 + \Sigma^I q + \Sigma^{II} q + \ldots}$$

Auch die andre (negative) Form der Kettenbrüche lässt sich derart in entwickelter Gestalt geben, indem auch für die symmetrischen Determinanten ähnliche Formeln existiren.

Diese entwickelten Darstellungen der Näherungsbrüche dürften bei Convergenzuntersuchungen nützlich sein, indem bekanntlich jeder Kettenbruch sich in eine Reihe entwickeln lässt, in der ausschliesslich die Nenner der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche vorkommen, eine explizite Darstellung derselben aber nicht möglich schien.

55) Baltzer, S. 15.
56) Ibid. S. 62.
57) Ibid. S. 57.

11. Ganz ähnlich, wie die absteigenden Kettenbrüche lassen sich auch die aufsteigenden behandeln. Betrachtet man den aufsteigenden Kettenbruch

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha + \frac{\beta}{b}}{a} + \gamma}{c} + \ldots}{} + \omega}{z}$$

und sucht man recurrirend seine Näherungswerthe zu bestimmen, so findet sich

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{\alpha}{a}$$
$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{\alpha b + \beta}{ab}$$
$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{\alpha bc + \beta c + \gamma}{abc}$$
$$\vdots$$

Die Nenner schreiten somit nach einem ganz einfachen Gesetz fort. Um den Zähler des nächsten Näherungsbruches zu erhalten, muss man den des vorhergehenden mit dem folgenden Theilnenner multipliciren und zu diesem Produkt den folgenden Theilzähler addiren. Hiernach lassen sich die Zähler der hier aufgestellten Näherungsbrüche leicht folgendermassen in Determinantenform schreiben:

$$\alpha$$
$$\begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ \beta & b \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ \beta & b & -1 \\ \gamma & 0 & c \end{vmatrix}$$

woraus wir uns sofort zu abstrahiren vermögen folgenden

Lehrsatz. Der Zähler des $n$ten Näherungsbruches des oben aufgestellten Kettenbruches ist gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 0 & c & -1 & \dots & 0 \\ \delta & 0 & 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}$$

Beweis. Ist der Satz wahr bis zur Determinante vom $(n-1)$ten Grad, so ist er es auch für die vom $n$ten Grad. Zerlegt man in Unterdeterminanten, so ergiebt sich die obige Determinante, welche wir mit $\triangle$ bezeichnen wollen, gleich folgender algebraischer Summe:

$$z \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 0 & c & -1 & \dots & 0 \\ \delta & 0 & 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi & 0 & 0 & 0 & \dots & y \end{vmatrix} \pm \omega \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Hier ist das Pluszeichen zu nehmen, wenn n ungerade, hingegen das Minuszeichen, wenn n gerade ist. Die zweite Determinante hat offenbar [58]) den Werth $(-1)^{n-1}$. Ist nun n gerade, so ist $n-1$ ungerade, somit hat die mit dem negativen Vorzeichen versehene Determinante den Werth $+1$; ist n ungerade, so ist $n-1$ gerade, und demnach ist jetzt die Determinante wiederum positiv. Wir haben folglich, wenn p_n den Zähler des nten Näherbruches bedeutet,

$$\triangle = z p_{n-1} + \omega$$

Wie wir oben sahen, ist jedoch auch stets

$$p_n = z p_{n-1} + \omega$$

und also durch Comparation

$$\triangle = p_n .$$

Zur Controle unsres Satzes mag folgendes dienen: Ist $a = b = c = \ldots z = 1$, so ist, wie man sofort sieht,

$$p_n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \omega.$$

Nun besagt aber ein bekannter Satz der Lehre von den Determinanten [58]), dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ a_1 & -b_0 & b_2 & 0 & \ldots & & 0 \\ a_2 & 0 & -b_1 & b_3 & \ldots & & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & -b_2 & \ldots & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & & -b_{n-1} \end{vmatrix}$$

stets dem Ausdrucke

$$(-1)^n (a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$$

gleich sei. Wenden wir diess auf unsren Fall an, so ist $b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_n = -1$. $(-1)^n$ ist positiv, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Im erstren Falle enthält das Produkt $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$ eine ungerade Anzahl von Faktoren, deren jeder $= -1$ ist, ist also selbst negativ, ebenso aber auch das Vorzeichen der Klammer, das Ganze somit positiv. Im anderen Falle ist

$b_1\, b_2 \ldots b_{n-1}$ positiv, hingegen das Vorzeichen der Klammer und $(-1)^n$ negativ, also wiederum das Ganze positiv, wie zuvor. Man hat demnach

$$p_n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \omega$$

wie zu erwarten stand.

Es ist von Interesse, einen aufsteigenden Kettenbruch in einen absteigenden zu verwandeln. Setzt man zu diesem Ende

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots + \frac{\varrho}{u} + \frac{\chi}{x} + \frac{\psi}{y} + \frac{\omega}{z} = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} + \ldots + \frac{x_{n-3}}{y_{n-3}} + \frac{x_{n-2}}{y_{n-2}} + \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + \frac{x_n}{y_n}$$

so findet man leicht [60])

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha & y_1 &= a \\ x_2 &= -\alpha\beta & y_2 &= b\alpha + \beta \\ x_3 &= -b\alpha\gamma & y_3 &= c\beta + \gamma \end{aligned}$$

Das aus diesen Anfangsgliedern sich ergebende Gesetz scheint bisher nur auf dem Wege der gewöhnlichen Induktion verallgemeinert, jedoch noch nicht mit Hülfe des vollständigen Schlusses von n auf n + 1 erwiesen zu sein. In der That bieten sich hier auch dem gewöhnlichen Verfahren einige Schwierigkeiten dar, welche jedoch mit Hülfe unsrer Darstellungsweise sich leicht beseitigen lassen.

Lehrsatz. Es ist allgemein

$$\alpha\beta\gamma\ldots\chi\psi \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & \ldots & . & 0 \\ \beta & b & -1 & \ldots & . & 0 \\ \gamma & 0 & c & \ldots & . & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \chi & 0 & 0 & \ldots\, x & -1 & 0 \\ \psi & 0 & 0 & \ldots & y & -1 \\ \omega & 0 & 0 & \ldots & . & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & b\alpha+\beta & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -b\alpha\gamma & c\beta+\gamma & . & . & . & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -u\varrho\chi & x\varrho+\chi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & -x\varrho\psi & y\chi+\psi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -y\chi\omega & z\psi+\omega \end{vmatrix}$$

Beweis. Da wir einen Induktionsbeweis zu geben beabsichtigen, so nehmen wir an, dass die Wahrheit folgender Relationen bereits dargethan sei:

1) $\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi M_1 = N_1$

2) $\alpha\beta\gamma \ldots \varrho\varphi M_2 = N_2$

indem wir unter M_1, M_2; N_1, N_2 resp. diejenigen Unterdeterminanten der beiden obigen Determinanten verstehen, welche bereits durch Winkelhaken abgegrenzt erscheinen. Zerlegen wir hierauf M_1 in Unterdeterminanten, so erhalten wir:

$$M_1 = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \beta & b & -1 & . & . & . & 0 \\ \gamma & 0 & c & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \chi & 0 & 0 & . & . & x & -1 \\ \psi & 0 & 0 & . & . & . & y \end{vmatrix} = yM_2 + \psi$$

In dieser Gleichung substituiren wir für M_1 und M_2 ihre aus den obigen Gleichungen 1) und 2) hervorgehenden Werthe, nämlich

$$M_1 = \frac{N_1}{\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi}$$

$$M_2 = \frac{N_2}{\alpha\beta\gamma \ldots \varphi}$$

und erhalten so

$$\frac{N_1}{\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi} = \frac{yN_2}{\alpha\beta\gamma \ldots \varphi} + \psi$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit ω, so ergiebt sich

$$\omega N_1 - y\chi\omega N_2 = \alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi\omega$$

hiezu addiren wir Gleichung 1), welche wir in folgender Form schreiben:

$$z\psi N_1 = z\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi M_1$$

und erhalten demgemäss

$$3) \quad (z\psi + \omega)N_1 - y\chi\omega N_2 = z\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi M_1 + \alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi\omega.$$

Betrachten wir nun die oben rechts stehende Determinante, so ergiebt deren Zerlegung in Unterdeteriminanten sofort

$$4) \quad (z\psi + \omega)N_1 - y\chi\omega N_2$$

und ebenso die Zerlegung der linksstehenden

$$zM_1 + \omega$$

und multiplicirt mit $\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi$

$$5) \quad z\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi M_1 + \alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi\omega$$

Die in 4) und 5) stehenden Ausdrücke sind aber nach Gleichung 3) einander gleich; hiemit ist der Beweis unsres Satzes geliefert.

Vermittelst eines ähnlichen Verfahrens lässt sich zeigen, dass

$$\alpha\beta\gamma\ldots\chi\psi\,abc\ldots yz = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -a\beta & b\alpha+\beta & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -b\alpha\gamma & c\beta+\gamma & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -u\varrho\chi & x\varrho+\chi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & -x\varphi\psi & y\chi+\psi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -y\chi\omega & z\psi+\omega \end{vmatrix}$$

Bei der Division hebt sich der gemeinschaftliche Faktor $\alpha\beta\gamma\ldots\chi\psi$ auf, und es ergiebt sich allgemein

$$\cfrac{\alpha + \cfrac{\beta + \ldots + \cfrac{\chi + \cfrac{\psi + \cfrac{\omega}{z}}{y}}{x}}{b}}{a} = \frac{\alpha}{a} - \cfrac{a\beta}{b\alpha+\gamma - \ldots - \cfrac{u\varrho\chi}{x\varrho+\chi - \cfrac{x\varphi\psi}{y\chi+\psi - \cfrac{y\chi\omega}{z\psi+\omega}}}}$$

Man sieht, dass das Gesetz, nach welchem sowohl die Theilzähler als die Theilnenner eines absteigenden Kettenbruches fortlaufen, welcher einem absteigenden gleich ist, ein sehr einfaches ist. Wäre es möglich, ebenso einen beliebigen absteigenden Kettenbruch in einen aufsteigenden zu verwandeln, dessen Näherungsbrüche sich leicht independent darstellen liessen, so wäre damit viel gewonnen, indem dann das allgemeine Glied der Reihe, in welche sich ein aufsteigender Kettenbruch leicht verwandeln lässt, sofort angebbar und somit die Untersuchung der Convergenz eines Kettenbruches ungemein erleichtert wäre. Diess ist jedoch nicht möglich, wir müssen uns begnügen, die Verwandlung eines absteigenden Kettenbruches in einen aufsteigenden folgendermassen darzustellen [61]):

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots + \cfrac{b_n}{a_n}}}} = b_1\frac{1}{a_1} - b_2\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}} - \ldots$$

58) Baltzer, S. 11.

59) Ibid. S. 17.

60) Lembkes, Theoria fractionum continuarum ascendentium, Monasterii 1870. S. 7.

61) Ibid. S. 25.

12. Es soll nunmehr noch im Folgenden an einem prägnanten Beispiel der Nutzen unsrer Darstellungsweise gezeigt werden, indem wir dieselbe dazu anwenden, die Summe der Glieder zu bestimmen, welche den nten Theilzähler oder Theilnenner eines beliebigen Näherungsbruches des Kettenbruches

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \ldots$$

ausmachen. Stern hat gezeigt, dass diese Anzahl sich auf doppelte Weise independent angeben lässt, das einemal durch eine Reihe, das andremal durch einen geschlossnen Ausdruck [62]. Während jedoch der erstre Ausdruck auf combinatorischem Wege ermittelt wird, sind zur Gewinnung des andren etwas fremdartige Betrachtungen aus der Theorie der recurrirenden Reihen herübergenommen worden, und es erscheint desshalb eine unmittelbare Auflösung dieses Problems nicht ohne Interesse.

Betrachtet man die den nten Theilnenner ausdrückende Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & . & . & . & 0 \\ b_2 & a_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & b_{n-1} & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & . & . & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

so ergiebt sich sofort, dass die Anzahl der diese Determinante bildenden Ausdrücke gleich ist der Summe derjenigen Ausdrücke, welche resp. die Determinante vom (n—1)ten und (n—2)ten Grade bilden. Bezeichnen wir also die Gliederanzahl des kten Näherungsnenners mit φ_k, so besteht folgendes System von Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} \\ \varphi_{n-1} &= \varphi_{n-2} + \varphi_{n-3} \\ \varphi_{n-2} &= \varphi_{n-3} + \varphi_{n-4} \\ &\vdots \\ \varphi_4 &= \varphi_3 + \varphi_2 \\ \varphi_3 &= \varphi_2 + \varphi_1 \end{aligned}$$

Dieses System trinomischer Gleichungen ist vollständig analog

dem von Scheibner (s. o. 8.) zuerst betrachteten; nur dass hier resp. $q = r = s = \ldots 1$ ist. Wenden wir die dort angegebne Kettenbruchentwickelung auf den uns vorliegenden Fall an, so ergiebt sich uns

$$\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}$$

und wir finden sonach die gesuchte Grösse φ_n, wenn wir den nten Näherungsnenner dieses Kettenbruches independent bestimmen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke den allgemeinen Kettenbruch

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \ldots + \frac{b}{a}$$

Denken wir uns zunächst diesen Kettenbruch unendlich fortlaufend, so ist bekanntlich sein Werth leicht zu bestimmen; es ist nämlich, wenn wir

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + b} = \frac{a}{2} + x$$

setzen,

$$b = x\,(a + x)$$

$$x = \frac{b}{a + x}$$

und somit

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \ldots \text{ in inf.} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2}$$

Suchen wir nunmehr den nten Näherungswerth dieses Kettenbruches, so haben wir, da wir von einem unendlichen Kettenbruche offenbar einen beliebigen endlichen Theil ohne Weiteres abtrennen dürfen,

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \ldots + \frac{b}{a\,|\text{d. nte}} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2}$$

Schreiben wir hierauf den links stehenden Kettenbruch in Determinantenform, so erhalten wir folgende Bestimmungsgleichung

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}-\frac{a}{2}=\frac{b\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots b & a \end{vmatrix}_{d.\ (n-1)te} + b\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots b & a \end{vmatrix}_{d.\ (n-2)te}\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}-\frac{a}{2}\right)}{\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots b & a \end{vmatrix}_{d.\ nte} + \begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots b & a \end{vmatrix}_{d.\ (n-1)te}\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}-\frac{a}{2}\right)}$$

indem wir nach einem bekannten Satze [63]

$$\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots b & a+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}-\frac{a}{2} \end{vmatrix}$$

in zwei Summanden zerlegt haben. Betrachten wir nunmehr die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots b & a \end{vmatrix}$$

so können wir dieselbe sofort als symmetrale Determinante in der Form

$$\begin{vmatrix} a & -\sqrt{b} & \dots & 0 \\ \sqrt{b} & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \sqrt{b} & a \end{vmatrix}$$

darstellen, und diese lässt sich (s. o. 11.) wieder sofort als Reihe schreiben; wir erhalten als ihren Werth

$$a^n + n\, a^{n-2}\, b^2 + \frac{(n-2)\ (n-1)}{2!}\, a^{n-4}\, b^4 + \dots$$

Diese Reihe geht für $a = b = 1$ in den von Stern angegebnen Ausdruck für φ_n über.

Wir wollen jedoch mit Hülfe dieses Reihenausdruckes unsere oben aufgestellte Relation vervollkommnen. Der Umstand, dass alle

ungeraden Potenzen von a sowohl wie von b fehlen, legt sofort die Nothwendigkeit dar, dass diese Reihe auch als Differenz zweier Ausdrücke in folgender Gestalt

$$\frac{(k_1 + k_2)^{n+2} - (k_1 - k_2)^{n+2}}{k_2}$$

dargestellt werden könne.

Es hebt sich nämlich hier die $(n + 2)$te Potenz weg, die $(n + 1)$te Potenz von k_2 geht durch Division mit k_2 in die (n)te über und wir sehen so, dass, unter k_1 und k_2 zwei vorläufig noch ganz unbestimmte Funktionen von a und b verstanden, dieser Ausdruck für unsre Reihe substituirt werden kann. Demnach ist der nte Näherungsbruch gleich folgendem Ausdruck

$$\frac{(k_1 + k_2)^{n+1} - (k_1 - k_2)^{n+1}}{(k_1 + k_2)^{n+2} - (k_1 - k_2)^{n+2}}$$

oder wenn wir mit $(k_1 + k_2)^{n+2}$ in Zähler und Nenner dividiren,

$$\frac{1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^{n+2}}$$

Setzen wir nunmehr $\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \psi_{a,b}$, wo ψ ebenfalls eine noch unbestimmte Funktion von a und b bedeutet, so haben wir die Relationen

$$\varphi_{n-2} = \frac{1}{k_2(k_1 + k_2)}(1 - \psi_{a,b}^{n}) \quad \varphi_{n-1} = \frac{1}{k_2(k_1 + k_2)}(1 - \psi_{a,b}^{n+1})$$

$$\varphi_n = \frac{1}{k_2(k_1 + k_2)}(1 - \psi_{a,b}^{n+2})$$

und unsre Bestimmungsgleichung geht somit in die folgende über

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2} = \frac{b(1 - \psi_{a,b}^{n+1}) + b\left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2}\right)(1 - \psi_{a,b}^{n})}{(1 - \psi_{a,b}^{n+2}) + \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2}\right)(1 - \psi_{a,b}^{n+1})}$$

Nun ist, wie sich aus der für den Nenner aufgestellten Determinante von selbst ergiebt,

$$(1 - \psi_{a,b}^{n+2}) = a(1 - \psi_{a,b}^{n+1}) + b(1 - \psi_{a,b}^{n})$$

Setzt man für $(1 - \psi_{a,\,b}^{n+1})$ den Werth ein, so erhält man eine neue Bedingungsgleichung. Diese Gleichung gilt nun für jeden Werth von n, also auch für $n = 1$; führt man diese Substitution durch, so lässt sich im Zähler und Nenner mit

$$1 - \psi_{a,\,b}$$

heben, und wir bekommen schliesslich

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} - \frac{a}{2} = \frac{b\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)(1+\psi_{a,\,b}) + b\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} - \frac{a}{2}\right)}{a\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)(1+\psi_{a,\,b}) + b}$$

Berechnet man hieraus $\psi_{a,\,b}$, so folgt

$$\psi_{a,\,b} = \frac{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{2}+b}}{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}}$$

und es ist somit

$$\frac{b\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \; .\,. & b & a \end{vmatrix}_{\text{d. (n 1)te}}}{\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \; .\,. & b & a \end{vmatrix}_{\text{d. nte}}} = \frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{n+1} - \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{n+1}}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{n+2} - \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{n+2}}$$

Um den Werth des Zählers, resp. Nenners selbst zu finden, müssen wir noch mit

$$k_2 = \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}$$

dividiren, und wir erhalten so, indem wir $a = b = 1$ setzen,

$$\varphi_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}$$

Anmerkung. Für $b = 1$ hat den oben stehenden Ausdruck Clausen [64]) durch Auflösung einer Funktionalgleichung, Ramus (s. o. 6.) durch Integration einer endlichen Differenzengleichung gefunden. Die hier durchgeführte Ableitung scheint am natürlichsten aus der independenten Bezeichnung der Näherungswerthe hervorzugehen. Interessant ist es auch, die oben nach Bartholomaei angegebene combinatorische Darstellung mit derjenigen zu vergleichen, welche Kinkelin dem von uns im Verstehenden betrachteten Ausdruck gegeben hat [65]). Es ist nach ihm

$$\frac{(a)\ \varphi_{m-1}}{(a)\ \varphi_m} = \frac{a^{2m-1} + (2m-2)_1\ a^{2m-3} + (2m-3)_2\ a^{2m-5} + \ldots}{a^{2m} + (2m-1)_1\ a^{2m-2} + (2m-2)_2\ a^{2m-4} + \ldots}$$

62) Stern, Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung, Berlin 1834. S. 8. S. 10.

63) Baltzer, S. 14.

64) Clausen, die Funktion $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ldots}}}$ durch die Anzahl der a ausgedrückt, Crelle's Journal. 3. Band. S. 87.

65) Kinkelin, Ueber die Ausziehung von Wurzeln aus Zahlen, Grunert's Archiv. 26. Theil. S. 386.

Zusätze zu Kapitel I.

Zu §. 2. Es könnte scheinen, als ob die in diesem Paragraph aufgestellte Behauptung, Euler's Algorithmus habe sich keinen allgemeineren Eingang verschafft, irrig sei, indem die Euler'schen Symbole häufig angetroffen werden. Allein es zeigt sich, dass entweder dieselben nur zur Ableitung einiger Sätze gebraucht werden, deren Beweis Euler selbst bereits gegeben hat, oder dass diese Symbole lediglich zur abkürzenden Bezeichnung benutzt werden. Das erstre findet man bei dioptrischen Untersuchungen, so in der physiologischen Optik von Fick [66]. Auch bei Gauss treffen wir auf die Euler'sche Klammer-Bezeichnung [67]. Es heisst daselbst: „Si quantitates A, B, C, D, E etc. ita ab his α, β, γ, δ pendent, ut habeatur

$$A = \alpha,\ B = \beta A + 1,\ C = \gamma B + A,\ D = \delta C + B,\ E = \varepsilon D + C \text{ etc.}$$

brevitatis gratia ita eas designamus,

$$A = [\alpha]\quad B = [\alpha, \beta],\ C = [\alpha, \beta, \gamma],\ D = [\alpha, \beta, \gamma, \delta] \text{ etc.}“$$

Es ist nun gegeben die unbestimmte Gleichung 1. Grades

$$ax = by \pm 1,$$

man bildet aus ihr durch gewöhnliche Division die Gleichungen

$$a = \alpha b + c,\ b = \beta c + d,\ c = \gamma d + e \ldots m = \mu n + 1$$

„Erit itaque

$$a = [n, \mu, \ldots \gamma, \beta, \alpha],\ b = [n, \mu \ldots \gamma, \beta]$$

Tum fiat

$$x = [\mu \ldots \gamma, \beta_1], \quad y = [\mu \ldots \gamma, \beta, \alpha]$$

eritque $ax = by + 1$, quando numerorum $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$, multitudo est par, aut $ax = by - 1$, quando est impar." Die Worte „brevitatis gratia" charakterisiren auf's Deutlichste die Ansichten von Gauss über diese Darstellungsweise.

Ohne, wie es scheint, von Euler's Arbeit Kenntniss zu haben, lieferte Clausen zu zwei im Vorstehenden enthaltenen Sätzen über die Kettenbrüche die Beweise [68]). Es sind die folgenden: hat man die Kettenbrüche

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \text{ und } \frac{1}{a_n} + \ldots + \frac{1}{a_1}$$

so ist

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1$$

und

$$[a_1 \ldots a_n] = [a_n \ldots a_1]$$

Der Beweis dieses letztren Satzes findet sich bei Euler (s. o. 2) kürzer erledigt.

Zu §. 4. Hindenburg kommt noch bei einer andren Gelegenheit [69]) auf seine involutorische Darstellung der Kettenbrüche zurück. Tetens [70]) hatte nämlich bei Gelegenheit der independenten Darstellung der Polynomialcoëfficienten der Combinatorik den Vorwurf gemacht, sie sei, wenn man gewisse analytische Substitutionen anwende, vollständig entbehrlich — ein Vorwurf, der freilich als ziemlich grundlos erscheinen muss, wenn man bemerkt, dass auch Tetens mit Symbolen operirt, deren Mechanismus weniger ausgebildet ist, als die von Hindenburg in ein festes System gebrachten combinatorischen Regeln. Hindenburg zeigt nun, dass seine Methode „bei Transformationen, Substitutionen und Interpolationen" von grösstem Vortheil sei, er beruft sich auf Cramer und Bézout, bei welchen allerdings die combinatorischen Symbole bereits in die ungleich vollkommeneren Determinanten übergehen, und fährt dann fort: „Ich berufe mich hier auf Dan. Bernouilli's Behandlung der Werthe für continuirliche Brüche, wo man deutlich übersieht, dass, nach Anbringung des von ihm sogenannten compendii praestantissimi, die Analysis aus ihren bis dahin

bekannten Mitteln, zu weiterer Abkürzung, zu allgemeinerer Darstellung, zu deutlicher Vorlegung des Bildungs- und Fortgangsgesetzes, nichts weiter hinzuzusetzen vermag, und dass man diese Vortheile zusammen und auf einmal erhält, sobald man die hier vorkommenden Combinationscomplexionen involutorisch ordnet und zusammensetzt. Die Sache verdient noch etwas genauer erwogen zu werden.

Folgendes Schema

$$A = \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{llllll} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 9 & \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 10 & \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 10 & \\ 0 & 2 & 5 & 9 & & \\ 0 & 3 & 6 & 8 & 10 & \\ 0 & 3 & 6 & 9 & & \\ 0 & 3 & 7 & 10 & & \end{array}\right\} = B \\ \left.\begin{array}{lllll} 1 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 4 & 6 & 9 & \\ 1 & 4 & 7 & 10 & \\ 1 & 5 & 8 & 10 & \\ 1 & 5 & 9 & & \end{array}\right\} = C \end{array}\right.$$

das man sehr leicht aus dem Anfange

$$\begin{array}{|ll} 8 & 10 \\ 9 & \end{array}$$

combinatorisch entwickelt, stellt von den continuirlichen Brüchen

$$z = 0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \text{ etc. bis } 10$$

oder

$$z = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \text{ etc bis } 10$$

den 5 Werth (v 5) vor.“ Es wird dann weiter gesagt, dass dieses involutorische Gesetz bereits in Euler's Algorithmus verborgen liege und mit einem Rückblick auf die Geschichte der combinatorischen Analysis heisst es schliesslich: „Auf solche Formen nun sind Leibnitz, Jac. Bernoulli, de Moivre, Cramer, Boscowich, Bézout, Castillon und andere, von Zeit zu Zeit verfallen, und haben die Wirksamkeit ihrer Formeln mit Bewunderung gerühmt und anempfohlen.“

Zu §. 5. Eine der Lieblein'schen ähnliche Regel findet sich auch angegeben von Weiss [71]). Es wird zum Zwecke optischer Untersuchungen der Zusammenhang der Kettenbrüche mit einem System trinomischer linearer Gleichnngen nachgewiesen und dann

die independente Bildung der Näherungswerthe eines so entstandenen Kettenbruches gelehrt.

66) A. Fick, Die medizinische Physik, Braunschweig 1858. S. 245.

67) Gauss, Disquisitiones Arithmeticae, Lipsiae 1801. S. 17.

68) Clausen, Demonstratio duarum celeberrimi Gaussii propositionum, Crelle's Journal, 3. Band. S. 311.

69) Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen, herausgegeben von Carl Friedrich Hindenburg, Leipzig 1796. 1. Sammlung. S. 275.

70) Ibid. S. 4.

71) Weiss, Elemente der analytischen Dioptrik, Nürnberg 1856. §. 1.

Verbesserungen.

S. 8. Z. 8 v. u. ist nach Singularis einzuschalten: in solvendo problemate Pelliano.
S. 21. Z. 9 v. o. ist nach fractionum einzuschalten: valoribus.
S. 32 Z. 9 v. u. statt a l. a_n.
S. 51 u. 52 ist bei sämmtlichen Exponenten statt (n + 2) und (n + 1) resp. (n + 1) und n zu lesen.

Kapitel III.

Anwendung der gewonnenen Resultate auf Analysis, Algebra und Physik.

13. Wir wollen nunmehr zunächst versuchen, den Fundamentalsatz der Lehre von den Kettenbrüchen zu beweisen, den Satz nämlich, dass, wenn

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \qquad \frac{p_n}{q_n}$$

resp. der $(n-1)$te und $n$te Näherungswerth des Kettenbruches

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ldots + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

ist, dass alsdann die Relation besteht:

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n$$

Bilden wir diese Differenz, so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_n & a_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_n & a_n \end{vmatrix}$$

Wir zerlegen nunmehr die beiden hier vorkommenden Determinanten vom $n$ten Grade nach den Elementen der $n$ten Horizontalreihe in Unterdeterminanten, während wir die beiden andren ungeändert lassen; wir bekommen so die obige Differenz in folgender Gestalt:

$$a_n \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & . \, a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . \, b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & . \, a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . \, b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ b_n \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & . \, a_{n-3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . \, b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & . \, a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . \, b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$- a_n \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & . \, a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . \, b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & . \, a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . \, b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$- b_n \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & . \, a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . \, b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & . \, a_{n-3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . \, b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

Wie man sieht, heben sich die beiden mit a_n multiplicirten Ausdrücke fort, und wir erhalten so

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n =$$



$$b_n \left[\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & . \ a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . \ b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & . \ a_{n-3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . \ b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & . \ a_{n-3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . \ b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & . \ a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . \ b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} \right]$$

$$= - b_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$$

Denkt man sich also diese sämmtlichen Differenzen gebildet und in eine Reihe geordnet, so zeigt sich, dass jedes folgende Glied dieser Reihe gleich ist dem negativen vorhergehenden, multiplicirt mit dem zugehörigen Theilzähler. Nun ist

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = - b_1 b_2 = (-1)^{2-1} b_1 b_2$$

somit gilt allgemein der Satz

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n$$

oder, wenn $b_n = 1$ ist,

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1.$$

Anmerkung. Man überzeugt sich leicht, dass der hier gegebne Beweis im Wesentlichen mit dem von Euler (s. o. 2) gegebnen übereinstimmt. Derselbe bedient sich zur Zerlegung seiner Symbole eines Verfahrens, welches ganz dem Zerfällen einer Determinante in ihre Unterdeterminanten entspricht und auch so wieder auf's Deutlichste zeigt, dass Euler's Algorithmus seinem eigentlichen Wesen nach eine Rechnung mit Determinanten war, freilich in einer für allgemeine Untersuchungen höchst unbequemen Form.

14. Verschiedne andre wichtige Sätze der Lehre von den Kettenbrüchen lassen sich mit Hülfe unsrer Bezeichnungsweise unmittelbar in ihrer Richtigkeit übersehen. Vergleicht man z. B. die beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} m_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & m_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & m_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & m_n \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} p_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & p_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & p_n \end{vmatrix}$$

mit einander, so sieht man sofort, dass dieselben nur dann gleich sein können, wenn allgemein

$$m_a = p_a$$

ist, unter „a" einen durchlaufenden Buchstaben verstanden. Diess liefert den Satz: zwei gewöhnliche Kettenbrüche, für die sämmtliche Theilzähler $= 1$ sind, können nicht gleich sein, wenn sie nicht identisch sind [72]).

Da man eine Determinante bekanntlich dadurch mit einer Zahl multiplicitt, dass man eine beliebige Colonne mit einer Zahl multiplicirt, so ergiebt sich auch ohne Weiteres, dass man, um einen Kettenbruch mit einer Zahl x zu multipliciren, entweder nur den ersten Theilzähler oder aber den ersten Theilzähler und Theilnenner mit x multipliciren muss, je nachdem der Kettenbruch die Form

$$\frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots}}$$

oder die Form

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots}}$$

hat [73]).

Mit Leichtigkeit kann man nun auch sehen, was aus einem Kettenbruche wird, von dem ein Theilzähler den Werth 0 hat. Es sei in dem Kettenbruche

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ldots + \cfrac{b_{r-1}}{a_{r-1} + \cfrac{b_r}{a_r + \ldots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}}$$

$b_r = 0$, so ist, wenn wir nach Form B. (s. o. 9.)

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots b_{r-1} & a_{r-1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & b_r & a_r & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots b_{r-1} & a_{r-1} & -\sqrt{b_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \sqrt{b_r} & a_r & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

setzen, dieser Kettenbruch gleich folgendem Ausdruck

$$\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots b_{r-1} & a_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & a_r & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots b_{r-1} & a_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & a_r & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n & a_n \end{vmatrix}}$$

Nun aber tritt für beide Determinanten der Laplace'sche Determinantensatz in Kraft [74]), so dass man, vorausgesetzt, dass die Determinante

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} a_r & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & a_1 \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ist, den obigen Bruch folgendermassen schreiben kann

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \ldots + \frac{b_{r-1}}{a_{r-1}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & b_{r-1} & a_{r-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & b_{r-1} & a_{r-1} \end{vmatrix}}$$

Sollte jedoch die Determinante $\triangle$ den Werth 0 haben, so würde diese Schlussfolgerung nicht mehr angewandt werden dürfen, indem man sonst [75]) auf die Form $\frac{0}{0}$ geführt würde. Auch zur Erkenntniss derjenigen Fälle, wo sich dieses Resultat ergeben würde, leistet unser Verfahren gute Dienste; hat man z. B. den Kettenbruch

$$\frac{b_1}{b_1} + \ldots + \frac{b_{r-1}}{a_{r-1}} + \frac{0}{a_r} - \frac{a_r}{a_r} + 1 - \frac{1}{a_s} + - \frac{a^2_s}{a_s}$$

so ist nunmehr

$$\begin{vmatrix} a_r & -a_r & 0 & 0 \\ -a_r & a_r+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a_s+1 & -a_s \\ 0 & 0 & -a_s & a_s \end{vmatrix} = \triangle$$

In diesem Falle ist die Determinante $\triangle = 0$ [76]); addirt man nämlich sämmtliche Glieder ein und derselben Horizontalreihe zusammen, so ist das Resultat 0, die Determinante ist symmetrisch, und also ist $\triangle = 0$.

72) Stern, S. 20.
73) Ibid. S. 24.
74) Baltzer, S. 34.
Laplace, Histoire de l'acad. de Paris, 1774. S. 294.
75) Stern, S. 25.
76) Baltzer, S. 17.

15. a) Unter einem „reciproken" Kettenbruch versteht man bekanntlich einen solchen, bei welchem die gleichweit von Anfang und Ende abstehenden Theilnenner einander gleich sind, während sämmtliche Theilzähler den Werth 1 haben. Bei jedem derartigen Kettenbruche ist

$$\frac{q^2_m \pm 1}{p_m}$$

eine ganze Zahl. Diess lässt sich folgendermassen beweisen. Es sei vorgelegt der Kettenbruch

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a}}}}}$$

Alsdann hat man

$$p_{m-1} = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & b & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & b \end{vmatrix}$$

$$q_m = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & b & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & c & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & a \end{vmatrix}$$

Diese beiden Determinanten sind nun offenbar einander gleich, indem die zweite, von unten rechts nach oben links gelesen, mit der ersten vollständig übereinstimmt. Es ist demnach

$$p_{m-1} = q_m$$

und da

$$p_m\, q_{m-1} - p_{m-1}\, q_m = \pm 1$$

ist, so erhält man durch Snbstitution

$$p_m\, q_{m-1} - q_m{}^2 = \pm 1.$$

Da nun q_{m-1} stets eine ganze Zahl ist. so muss auch

$$\frac{q^2_m \pm 1}{p_m} = q_{m-1}$$

eine solche sein [77]).

b) Eine elegante Anwendung können wir von unsrer Darstellungsweise machen auf einen Satz von Legendre [68]). Derselbe bedarf nämlich zum Beweise des Satzes, dass das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser sich durch keine geschlossne Zahl darstellen lasse, des Hilfssatzes, dass der Kettenbruch

$$\cfrac{p_1}{n_1 + \cfrac{p_2}{n_2 + \cfrac{p_3}{n_3 + \ldots}}}$$

dessen Terme sämmtlich positive oder negative ganze Zahlen sind, einer Irrationalzahl gleich sei, vorausgesetzt

$$\frac{p_1}{n_1}, \frac{p_2}{n_2}, \frac{p_3}{n_3} \ldots < 1.$$

Es wird desshalb zuerst bewiesen, dass der Werth des Kettenbruchs stets kleiner sein müsse, als die Einheit; nur in dem speciellen Falle, wo $n_1 = p_1 + 1$, $n_2 = p_2 + 1 \ldots$ und die Theilzähler sämmtlich negativ sind, kommt er der Einheit gleich, d. h. der Kettenbruch

$$\cfrac{p_1}{p_1 + 1 - \cfrac{p_2}{p_2 + 1 - \cfrac{p_3}{p_3 + 1 - \ldots}}}$$

hat, in's Unendliche fortgesetzt, den Werth 1. Legendre giebt keinen Beweis für diesen zweiten Theil seines Lehrsatzes; Baltzer [79]) führt denselben in der Weise, dass er zuerst die constante Differenz zwischen Zähler und Nenner jedes Näherungsbruches bestimmt; dieselbe findet sich $= -1$; man hat demnach

$$q_m - p_m = 1$$

$$1 - \frac{p_m}{q_m} = \frac{1}{q_m}$$

$$\lim \frac{p_m}{q_m} = 1, \; m = \infty.$$

Dass in der That stets $q_m - p_m = 1$ ist, lässt sich natürlich auch mittelst des gewöhnlichen Verfahrens leicht darthun; jedoch muss man dabei den Umweg machen, erst den constanten

Werth der Differenz nachzuweisen und hierauf für irgend eine beliebige dieser Differenzen den numerischen Werth zu suchen.

Die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \ldots 0 \\ -p_1 & p_1 + 1 & -1 \ldots 0 \\ 0 & -p_2 & p_2 + 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots -p_n \; p_n + 1 \end{vmatrix}$$

hat stets den Werth 1. Denn ist diess der Fall für die Determinanten vom (n — 2)ten und (n — 1)ten Grad, so erhält man

$$\triangle = p_n + 1 - p_n = 1$$

Nun ist aber

$$1 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -p_1 & p_1 + 1 \end{vmatrix} = p_1 + 1 - p_1 = 1$$

somit ist die allgemeine Gültigkeit des Satzes bewiesen.

Betrachten wir unsren Kettenbruch, so ist

$$P_n = \begin{vmatrix} p_1 & -1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & p_2 + 1 & -1 \ldots 0 \\ 0 & -p_3 & p_3 + 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots -p_n \; p_n + 1 \end{vmatrix}$$

$$Q_n = \begin{vmatrix} p_1 + 1 & -1 & 0 \ldots 0 \\ -p_2 & p_2 + 1 & -1 \ldots 0 \\ 0 & -p_3 & p_3 + 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots -p_n \; p_n + 1 \end{vmatrix}$$

Diese beiden Determinanten sind vollständig identisch mit Ausnahme der ersten Verticalreihe; zieht man also die obere von der unteren ab, so folgt

$$Q_n - P_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -p_2 & p_2+1 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & -p_3 & p_3+1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots -p_n & p_n+1 \end{vmatrix} = 1$$

wie sich aus dem Vorhergehenden ergiebt.

c) Um sich zu überzeugen, ob ein aus einem gewöhnlichen Bruche entwickelter Kettenbruch der richtige sei, d. h. ob man bei der Rechnung keinen Fehler begangen habe, kann man folgendermassen verfahren, wie Anton [80]) gezeigt hat. Versteht man unter C (gewöhnlich sind 11 und 13 die angewandten Zahlen) den Rest, welcher bei der Division einer Zahl A durch eine andre Zahl B, den Modul, sich ergiebt, und betrachtet man C als die sogenannte „Probezahl", so hat man

$$A = mB + C$$

Ist der Kettenbruch

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \ldots + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}}}$$

vorgelegt, und ist z_1 die Probezahl der gemischten Zahl

$$a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}$$

so kann man dem Kettenbruche $\frac{B_1}{A_1}$ den folgenden

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \ldots + a_{n-2} + \frac{b_{n-1}}{z_1}}}$$

substituiren, welcher dieselbe Probezahl hat, wie $\frac{B_1}{A_1}$. Auf diese Weise fortgehend ersetzt man $a_{n-2} + \frac{b_{n-1}}{z_1}$ durch dessen Probezahl z_2 u. s. f.; der Bruch $\frac{b_1}{z_{n-1}}$ liefert schliesslich eine Probezahl z_n, welche bei richtiger Rechnung derjenigen von $\frac{B_1}{A_1}$ gleich sein muss.

Dass aber in der That $\frac{B_1}{A_1}$ und $\frac{B_2}{A_2}$ nach dem Modul p die gleiche Probezahl haben, lässt sich einfach beweisen.

Es ist

$$\frac{B_1}{A_1} \equiv z_1 \pmod{p}$$

und es soll bewiesen werden, dass auch

$$\frac{B_2}{A_2} \equiv z_1 \pmod{p}$$

Ist diess aber der Fall, so ist auch

$$\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} = Mp$$

und es genügt also, die Wahrheit dieser Gleichung nachzuweisen. M ist eine vorläufig noch unbestimmte Zahl.

Da z_1 die Probezahl von

$$a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}$$

nach dem Modul p ist, so hat man

$$a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n} = Np + z_1$$

$$z_1 = a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n} - Np$$

Substituirt man diesen Werth von z_1 in $\frac{B_2}{A_2}$, so muss die Differenz

$$\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1} + b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1} + b_n \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1} + b_n - a_n Np \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1} + b_n - a_n Np \end{vmatrix}}$$

ein Vielfaches von p sein. Betrachtet man in den beiden Determinanten des Subtrahenden wiederum

$$a_n a_{n-1} + b_n$$

als Minuenden,

$$a_n Np$$

als Subtrahenden, so kann man jede derselben durch Subtraktion in zwei andere zerlegen. Indem man den Nenner fortlässt, kann man hierauf den Werth obiger Differenz unmittelbar in folgender Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1}+b_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1}+b_n \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1}+b_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n Np \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1}+b_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1}+b_n \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1}+b_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n Np \end{vmatrix}$$

Zwei Glieder dieses Aggregates heben sich, wie man sieht, gegenseitig auf. Da nun ferner bekanntlich jede Determinante, welche in einer Zeile bis auf Ein Glied lauter Nullen enthält, auf eine Determinante vom nächst niederen Grade, multiplicirt mit jenem Gliede, sich reducirt, so nimmt die Differenz folgende Gestalt an

$$\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} = Mp$$

wobei

$$M = \frac{a_n N \left\{ \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,.. & a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1} + b_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,.. & b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,.. & a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1} + b_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,.. & b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix} \end{array} \right\}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,.. & b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,.. & a_n b_{n-1} & a_n a_{n-1} + b_n \end{vmatrix}}$$

ist [81]).

77) **Serret**, Handbuch der höheren Algebra, deutsch von **Wertheim**, Leipzig 1868. I. Band, S. 25.

78) **Legendre**, Éléments de géométrie, Paris 1823. S. 294.

79) **Baltzer**, Elemente der Mathematik, Leipzig 1865. I. Band, S. 76.

80) **Anton**, Die Elferproben und die Proben für die Moduln Neun, Dreizehn und Hunderteins, **Grunert's** Archiv, XLIV. Theil, S. 294.

81) **Baltzer**, Determinanten, S. 9.

16. Wir wollen nunmehr dazu übergehen, die Verwendbarkeit der Determinanten in der wichtigen Lehre von der Transformation der Kettenbrüche zu untersuchen, und zwar beschäftigen wir uns im Folgenden damit, den Kettenbruch

$$\cfrac{\frac{1}{x}}{1 + \cfrac{\frac{p_1}{x}}{1 + \cfrac{\frac{p_2}{x}}{1 + \dots + \cfrac{\frac{p_{2n-2}}{x}}{1 + \frac{p_{2n-1}}{x}}}}}$$

auf eine andre Form zu bringen. Zunächst schaffen wir die jeden Theilzähler bildenden Brüche dadnrch weg, dass wir je zwei anfeinanderfolgende Theilzähler und den zwischen ihnen liegenden Theilnenner mit x multipliciren; unser Kettenbruch geht hiednrch in den folgenden über

$$\cfrac{1}{x + \cfrac{p_1}{1 + \cfrac{p_2}{x + \cfrac{p_3}{1 + \ldots + \cfrac{p_{2n-2}}{x + \cfrac{p_{2n-1}}{1}}}}}}$$

Mit der weitren Umformung dieses Kettenbruches werden wir es nunmehr im Folgenden zu thun haben.

Der Nenner unseres Kettenbruches ist nun gleich folgender Determinante 2n ten Grades

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ p_1 & 1 & -1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & p_2 & x & -1 & \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 1 & \ldots & & 0 \\ \ldots & & & & & & \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{2n-2} \;\; x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{2n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

Wir vertauschen jetzt die dritte Horizontalreihe mit der zweiten, hierauf die fünfte mit der nunmehrigen Dritten, und fahren in dieser Weise fort, bis in sämmtlichen n ersten Horizontalreihen der Term x vorkommt. Da jede solche Vertauschung [82]) einen Zeichenwechsel der Determinante mit sich bringt, so geht unsre Determinante in die folgende über

$$(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & x & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \\ \ldots & & & & & \\ p_1 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \end{vmatrix}$$

Hierauf nehmen wir eine ganz entsprechende Verschiebnng vor mit den Vertikalreihen, bis schliesslich nach $(n-1)$ Vertauschungen die n ersten Vertikalreihen x enthalten. Die obige Determinante wird hiednrch abermals multiplicirt mit $(-1)^{n-1}$; es tritt demnach vor dieselbe der Faktor

$$(-1)^{2(n-1)} = +1.$$

Wir erhalten so, wenn wir, wie mehrmals, uns der Bezeichnung $\triangle$ bedienen,

$$\triangle = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_5 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_7 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix}$$

Addirt man jetzt zur ersten Horizontalreihe die $(n+1)$te, ebenso znr zweiten die $(n+2)$te und allgemein zur rten die $(n+r)$te, so erhält man

$$\triangle = \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x+p_3 & -1 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x+p_5 & -1 & p_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+p_7 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_1 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 1\;0\;0\;0 & 0 \\ 0 & p_3 & -1 & \cdot & \cdot & 0\;1\;0\;0 & 0 \\ 0 & 0 & p_5 & \cdot & \cdot & 0\;0\;1\;0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0\;0\;0\;1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0\;0\;0\;0 & 1 \end{vmatrix}$$

Wir vollziehen mit diesem Ansdrucke nnn wieder die nämliche Operation, nur mit dem Unterschiede, dass wir die Vertikalreihen statt der Horizontalreihen nehmen und die erste Reihe nicht berücksichtigen; so ergiebt sich

$$\triangle = \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+p_2+p_3 & -1 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+p_4+p_5 & -1 & p_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+p_6+p_7 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_5 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Um diese Determinante in eine Kettenbruch-Determinante zu verwandeln, multipliciren wir jetzt allgemein die $(n+r)$te Horizontalreihe mit

$$p_{r+1}$$

wobei jedoch r stets $\geqq 1$ genommen werden mnss. Führen wir diese Operation aus, so haben wir dadurch $\triangle$ mit dem Ausdrucke

$$p_2 \; p_4 \; p_6 \; . \; . \; . \; p_{2n-2}$$

multiplicirt, und müssen demnach mit dem Reciproken dieses Ausdruckes nochmals multipliciren; es folgt alsdann

$$\triangle = \frac{1}{p_2 \ldots p_{2n-2}} \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+p_2+p_3 & -1 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+p_4+p_5 & -1 & p_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+p_6+p_7 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_1 p_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot\;\cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 p_4 & 0 & 0 & \cdot\;\cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot\;\cdot & p_{2n-3} p_{2n-2} & \cdot\;\cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

In dieser Determinante snbtrahiren wir resp. von der $r$ten Horizontalreihe die $(n+r)$te, r stets > 1 angenommen, und bekommen so

$$\triangle = \frac{1}{p_2 \dots p_{2n-2}} \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -p_1p_2 & x+p_2+p_3 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_3p_4 & x+p_4+p_5 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -p_5p_6 & x+p_6+p_7 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1p_2 & 0 & 0 & \dots & p_2 & 0 & 0 \quad 0 \\ 0 & p_3p_4 & 0 & \dots & 0 & p_4 & 0 \quad 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \quad p_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Nunmehr multipliciren wir resp. die $(n + r)$te Vertikalreihe mit

$$p_{r-1}$$

und erhalten

$$\triangle = \frac{1}{p_1p_2 \dots p_{2n-3}\, p_{2n-2}} \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -p_1p_2 & x+p_2+p_3 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_3p_4 & x+p_4+p_5 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -p_5p_6 & x+p_6+p_7 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1p_2 & 0 & 0 & \dots & p_1p_2 & 0 \quad 0 & 0 \\ 0 & p_3p_4 & 0 & \dots & 0 & p_3p_4 \quad 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \quad 0 & p_{2n-2}\, p_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Indem man schliesslich die $(n + r)$te Vertikalreihe von der rten abzieht, ergiebt sich

$$\triangle = \frac{1}{p_1p_2\cdots p_{2n-3}p_{2n-2}}\begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -p_1p_2 & x+p_2+p_3 & -1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -p_3p_4 & x+p_4+p_5 & -1 & 0 & . & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -p_5p_6 & x+p_6+p_7 & -1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & -1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & -p_{2n-3}p_{2n-2} & & & x+p_{2n-2}+p_{2n-1} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & & p_1p_2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & & 0 & p_3p_4 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & & 0 & 0 & . & . & p_{2n-3}p_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Nun aber können wir wieder den Determinantensatz von Laplace anwenden (s. o. 14) und nnsre Determinante lässt sich folgendermassen als Produkt darstellen; es ist

$$\triangle = \frac{1}{p_1p_2\cdots p_{2n-3}p_{2n-2}}\begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -p_1p_2 & x+p_2+p_3 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_3p_4 & x+p_4+p_5 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots -p_{2n-3}p_{2n-2} & x+p_{2n-2}+p_{2n-1} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} p_1p_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_3p_4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_5p_6 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{2n-3}p_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Der zweite Faktor dieses Produktes redncirt sich nnn, wie man sofort sieht [83], anf das Diagonalglied; dieses hebt sich gegen den vor dem Produkt stehenden Bruch; und es ist also

$$\triangle = \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -p_1p_2 & x+p_2+p_3 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_3p_4 & x+p_4+p_5 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots -p_{2n-3}p_{2n-2} & x+p_{2n-2}+p_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Indem wir mit dem Zähler ebenso verfahren, wie hier mit

dem Nennner, erhalten wir den Satz, dass die beiden Kettenbrüche

$$\cfrac{\frac{1}{x}}{1+\cfrac{\frac{p_1}{x}}{1+\cfrac{\frac{p_2}{x}}{1+\ldots+\cfrac{\frac{p_{2n}}{x}}{1+\frac{p_{2n+1}}{x}}}}}$$

und

$$\frac{1}{x+p_1} - \frac{p_1p_2}{x+p_2+p_3} - \frac{p_3p_4}{x+p_4+p_5} - \ldots - \frac{p_{2n-1}\,p_{2n}}{x+p_{2n}+p_{2n+1}}$$

einander gleich sind, ein Satz, welchen, wie es scheint, zuerst Heilermann [84]) auf induktorischem Wege gefunden hat.

82) Baltzer, S. 8.

83) Ibid. S. 11.

84) Heilermann, Zusammenhang unter den Coëfficienten zweier gleicher Kettenbrüche von verschiedener Form, Schlömilch's, Zeitschr. für Math. u. Phys. 5. Jahrg. S. 362.

17. Dividirt man die Funktion

$$x^{2n} - 2\cos gx^{n} + 1$$

durch den trinomischen Ausdruck

$$x^2 - \alpha x + \beta$$

welchen jene Funktion stets als Faktor haben muss, so ergiebt sich folgende Reihe

$$x^{2n-2} + A_1 x^{2n-3} + A_2 x^{2n-4} + \ldots + A_{2n-3}\,x + A_{2n-2}$$

Zur Bestimmung der hier auftretenden Coëfficienten kann man [85]) nachstehende Relationen benutzen

$$A_1 = \alpha$$
$$A_2 = \alpha A_1 - \beta$$
$$A_3 = \alpha A_2 - \beta A_1$$
$$\vdots$$

$$A_{n-1} = \alpha A_{n-2} - \beta A_{n-3}$$
$$A_n = \alpha A_{n-1} - \beta A_{n-2} - 2g\cos\alpha$$

Es ist demnach dem Obigen zufolge, A_{n-1} gleich folgender Determinante

$$\left|\begin{array}{ccccccc} \alpha & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -\beta & \alpha & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -\beta & \alpha \end{array}\right|_{\text{d. (n-1)te}}$$

und A_n hat den Werth

$$\left|\begin{array}{ccccccc} \alpha & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -\beta & \alpha & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -\beta & \alpha \end{array}\right|_{\text{d. nte}} - 2g\cos\alpha$$

Setzt man, was stets möglich ist,

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 0 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & -1 \\ -2g\cos\alpha & 0 & 0 & . & . & \beta & \alpha \end{array}\right| = -2g\cos\alpha$$

so lassen sich diese beiden Determinanten sofort addiren, und es wird

$$A_n = \left|\begin{array}{ccccccc} \alpha & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -\beta & \alpha & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -2g\cos\alpha & 0 & 0 & . & . & \beta & \alpha \end{array}\right|$$

Um also einen beliebigen Coëfficienten A_r der obigen Reihe zu berechnen, hat man nur aus dem n gliedrigen Kettenbruche

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} - \ldots - \frac{\beta}{\underset{(r)}{\alpha}} - \ldots - \frac{\beta}{\underset{(n-1)}{\alpha}} - \frac{\beta}{\underset{(n)}{\alpha}} - 2g\cos\alpha$$

den rten Näherungsnenner zu entnehmen.

85) Arndt, Untersuchungen über die Theoreme von Cotes und Moivre, Grunert's Archiv, XI. Theil. S. 192.

18. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie vermittelst einiger von Nägelsbach[86]) entwickelten Formeln auf höchst einfache Weise das bekannte System hergeleitet werden kann, durch welches die Sinus der vielfachen Winkel recurrirend an einander geknüpft sind.

Versteht man unter

$$\overset{m}{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}$$

den Quotienten

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{r} \\ 1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

so ergiebt sich die Relation

$$(-1)^r \overset{r}{(\alpha_1\alpha_2)} = \frac{\alpha_1^{r+1} - \alpha_2^{r+1}}{\alpha_1 - \alpha_2} = \begin{vmatrix} -(\alpha_1+\alpha_2) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -(\alpha_1+\alpha_2) & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -(\alpha_1+\alpha_2) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \;.\;. & 1 & -(\alpha_1+\alpha_2) \end{vmatrix}_{r+1}$$

wo der Index selbstverständlich nur die Stelle bezeichnen soll. Setzt man

$$\alpha_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
$$\alpha_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

so geht unsre Gleichung in die folgende über

$$\frac{\sin(r+1)\varphi}{\sin\varphi} = (-1)^r \begin{vmatrix} -2\cos\varphi & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & -2\cos\varphi & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2\cos\varphi & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \;.\;. \; 1 & & -2\cos\varphi \end{vmatrix}_{(r+1)}$$

Eine entsprechende Determinante vom nächst niederen Grade ergibt sich für

$$\frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}$$

Wir erheben dieselbe dadurch auf den $(r + 1)$ten Grad, dass wir ihr in der Verlängerung des Diagonalgliedes eine 1 beifügen und die neue Determinante mit Nullen rändern; durch Division ergiebt sich alsdann

$$\frac{\sin r\varphi}{\sin(r+1)\varphi} = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2\cos\varphi & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2\cos\varphi & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \;.\;. \; 1 & & -2\cos\varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2\cos\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2\cos\varphi & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2\cos\varphi & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \;.\;. \; 1 & & -2\cos\varphi \end{vmatrix}}$$

Den rechts stehenden Quotienten können wir sofort als Kettenbruch schreiben; wir erhalten so

$$\frac{\sin r\varphi}{\sin(r+1)\varphi} = -\cfrac{1}{-2\cos\varphi - \cfrac{1}{-2\cos\varphi - \cfrac{1}{-2\cos\varphi - \dots - \cfrac{1}{-2\cos\varphi}}}}_{(r+1)}$$

Es ist nun bekannt und oben (s. o. 8) bereits benutzt worden, dass sich in einem System linearer trinomischer Gleichungen das

Verhältniss je zweier auf einander folgender Unbekannter als ein aus den Constanten der Gleichungen gebildeter Kettenbruch angeben lässt; natürlich lässt sich dieser Satz umkehren, so dass aus dem Kettenbruche

$$\frac{p_1}{q_1 - \frac{p_2}{q_2 - \frac{p_3}{q_3 - \ldots}}}$$

sofort auf die Existenz der Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1u \;&-\; q_1u_1 \;+\; u_2 = 0 \\ p_2u_1 \;&-\; q_2u_2 \;+\; u_3 = 0 \\ p_3u_2 \;&-\; q_3u_3 \;+\; u_4 = 0 \\ &\;\;\vdots \end{aligned}$$

geschlosseen werden kann. Wenden wir diess auf den uns vorliegenden Fall an, so zeigt sich, dass der obenstehende Kettenbruch nur aus folgendem Systeme hervorgegangen sein kann

$$\begin{aligned} \sin\varphi \;&-\; 2\cos\varphi\, \sin 2\varphi + \sin 3\varphi = 0 \\ \sin 2\varphi \;&-\; 2\cos\varphi\, \sin 3\varphi + \sin 4\varphi = 0 \\ \sin 3\varphi \;&-\; 2\cos\varphi\, \sin 4\varphi + \sin 5\varphi = 0 \\ &\;\;\vdots \end{aligned}$$

Diese Kette von Relationen wird also hier mit Einem Schlage gewonnen.

Wir wollen noch kurz den Kettenbruch auf die geschlossne Form zurückführen. Nach der Clausen'schen Formel (s. o. 12) haben wir, da

$$-a = 2\cos\varphi,\ b = -1$$

ist,

$$-\frac{1}{-2\cos\varphi} - \frac{1}{-2\cos\varphi} - \ldots - \frac{1}{-2\cos\varphi}_{(r+1)}$$

$$= \frac{(-\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^r - (-\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^r}{(-\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^{r+1} - (-\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^{r+1}}$$

Setzt man hier

$$\sqrt{\cos^2\varphi - 1} = i \sin\varphi$$

und wendet den Moivre'schen Lehrsatz an, so erhält man rechts des Gleichheitszeichens folgenden Ausdruck

$$\frac{-\cos r\varphi + i\sin r\varphi + \cos r\varphi + i\sin r\varphi}{-\cos(r+1)\varphi + i\sin(r+1)\varphi + \cos(r+1)\varphi + i\sin(r+1)\varphi}$$

und dieser ist wiederum identisch mit

$$\frac{\sin r\varphi}{\sin(r+1)\varphi}$$

86) Nägelsbach, Ueber eine Classe symmetrischer Funktionen, Zweibrücken 1871. S. 25.

19. Wir haben oben den von Legendre aufgefundenen Kettenbruch betrachtet, welcher stets den Werth 1 hat; das Nämliche ist der Fall bei dem Kettenbruch

$$\frac{1}{1} + \frac{b_1}{1-b_1} + \frac{b_2}{1-b_2} + \ldots$$

dessen Näherungsbrüche ganze Zahlen sind. Denn der $(n+1)$te Nenner dieses Kettenbruches ist gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & 1-b_1 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & 1-b_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\; b_n & 1-b_n \end{vmatrix}$$

und dass dieselbe stets den Werth 1 hat, zeigt sich sofort durch Zerlegung in Unterdeterminanten. Wir stellen uns nun die Aufgabe, jede beliebige ganze Zahl in einen Kettenbruch von gegebner Stellenzahl zu verwandeln, und betrachten zu diesem Zwecke den $(n+1)$ten Näherungs-Zähler

$$\begin{vmatrix} 1-b_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & 1-b_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & 1-b_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\; b_n & 1-b_n \end{vmatrix}$$

und suchen demselben eine andre Form zu geben. Hiezu verhilft uns die Determinante

$$M_n = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 1 & b_2 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 1 & b_3 & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \end{vmatrix}$$

welche ersichtlich zu einer gewissen Klasse von Determinanten gehört, von welcher wir bereits bei Betrachtung der aufsteigenden Kettenbrüche (s. o. 11) einen Spezialfall bemerkt haben. Wir transformiren diese Determinante dadurch, dass wir stets von einer Zeile die nächst über ihr stehende abziehen; sie geht dadurch in folgende über

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1-b_1 & b_2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1-b_n \end{vmatrix}$$

oder auch

$$\begin{vmatrix} 1-b_1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ b_2 & 1-b_2 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_3 & 1-b_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & b_n & 1-b_n \end{vmatrix}$$

Diess ist aber offenbar diejenige Determinante, von welcher wir ausgegangen sind.

Zerlegen wir die Determinante M_n in Unterdeterminanten, so erhalten wir sofort

$$M_n = M_{n-1} + (-1)^{n-1} b_1 b_2 \dots b_{n-1}$$

und hieraus weiter

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 1-b_2 & -1 & \dots & & 0 \\ 0 & b_3 & 1-b_3 & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n & 1-b_n \end{vmatrix} = M_n = 1 - b_1 + b_1 b_2 - + \dots \pm b_1 b_2 \dots b_n$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Handelt es sich also darum, eine ganze Zahl C in einen m gliedrigen Kettenbruch zu verwandeln, so hat man folgende unbestimmte Gleichung aufzulösen:

$$C = 1 - b_1 + b_1 b_2 - + \dots \pm b_1 b_2 \dots b_{m-1}$$

Es sei z. B. $C = 115$, $m = 5$; alsdann hat man

$$115 = 1 - b_1 + b_1 b_2 - b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_3 b_4$$

Die Zahl 114 hat die Theiler 1, 2, 3, 6, 19, 38, 57, 114; einer dieser Zahlen muss also b_1 gleich sein. Es sei z. B. $b_1 = 6$, alsdann hat man für b_2 die Wahl unter den Zahlen 1, 2, 4, 5, 10, 20. Es sei $b_2 = 5$; dann kann b_3 eine der Zahlen 1 oder 3 sein; setzt man es $= 3$, so muss schliesslich $b_4 = 2$ sein, und man erhält

$$115 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{6}{-5 + \cfrac{5}{-4 + \cfrac{3}{-2 + \cfrac{2}{-1}}}}}$$

Man sieht, dass es durch einfache Abzählung sehr leicht möglich ist, die Anzahl der m gliedrigen Kettenbrüche zu bestimmen. welche einer gegebnen ganzen Zahl gleich sind.

Anmerkung. Die hier gegebnen Formeln begreifen die von Stern [87]) gegebenen als spezielle Fälle unter sich. Die Identität

$$m = \frac{mn}{n - m + m}$$

liefert den Kettenbruch

$$m = \cfrac{mn}{m - n + \cfrac{mn}{m - n + \dots}}$$

Ebenso erhält man, da

$$m = m - 1 + \frac{m}{m}$$

ist,

$$m = m - 1 + \frac{m}{m-1} + \frac{m}{m-1} + \dots$$

87) Stern, S. 205.

20. Die beiden Kettenbrüche

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n}$$

und

$$\frac{b_1}{a_n} + \frac{b_n}{a_{n-1}} + \dots + \frac{b_2}{a_1}$$

haben gleiche Nenner [87]). Denn die Nenner werden resp. durch die folgenden beiden Determinanten dargestellt

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots b_n & a_n \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_n & a_{n-1} & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots b_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

Nun sieht man, dass in der ersten Determinante sämmtliche Zeilen je einer Colonne der zweiten gleich sind; dass derartige Determinanten einander gleich sein müssen, scheint zwar einerseits natürlich; jedoch dürfte es andrerseits einer von Becker [88]) gemachten Bemerkung zufolge als ausgemacht anzusehen sein, dass die bisherigen Beweise dieses Satzes manches zu wünschen übrig lassen. Nun hat allerdings Beckor einen einwnrfsfreien Beweis des fraglichen Satzes geliefert; derselbe möchte jedoch zu complicirt sein für eine so einfache Sache, nnd es sich daher verlohnen, einen kürzeren zu geben.

Es sei nachgewiesen, dass für zwei Determinanten $(n-1)$ten Grades Zeilen und Colonnen vertauscht werden dürfen; betrachtet man alsdann die beiden Determinanten $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{rn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdot & a_{r1} & \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdot & a_{r2} & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1r} & a_{2r} & a_{3r} & \cdot & a_{rr} & \cdot & a_{nr} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdot & a_{rn} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und zerlegt die erste nach den Elementen der ersten Colonne, die zweite nach den Elementen der ersten Zeile in Unterdeterminanten, so erhält man als allgemeines Glied der Zerlegung das erstemal

$$(-1)^{r-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix},$$

das zweitemal

$$(-1)^{r-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Diese beiden Determinanten $(n-1)$ten Grades sind nun aber, wie vorausgesetzt ward, einander gleich, und da offenbar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ist, so ist die allgemeine Gültigkeit unsres Satzes bewiesen und hieraus ergiebt sich auch die Gleichheit der oben betrachteten beiden Nenner.

Hat man die beiden Kettenbrüche

$$\frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 + \ldots +} \frac{b_n}{a_n}$$

und

$$\frac{b_n}{a_n} + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \ldots +} \frac{b_1}{a_1}$$

so findet die Gleichheit der Nenner nur dann statt, wenn sämmtliche Theilzähler b einander gleich sind. Denn wir haben alsdann die beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_n & a_n \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a_{n-2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

In der ersten Determinante kommt b_1, in der zweiten b_n nicht vor; es kann also Gleichheit nur dann bestehen, wenn

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = A$$

ist. Insbesondre ist diess der Fall, wenn $A = 1$ ist; es haben also die beiden Kettenbrüche

$$\frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 + \ldots +} \frac{1}{a_n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{a_n + \ldots +} \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_1}$$

gleiche Nenner.

Anmerkung. Der grosse Nutzen, welchen die concise Darstellung der Näherungswerthe vermittelst Determinanten gewährt, zeigt sich sehr augenfällig, wenn man den für den obigen Satz hier gegebnen unmittelbar in die Augen springenden Beweis mit den weitläufigen Beweisen von Schwarz [89]) und Grnnert [90]) vergleicht. Auch ergiebt sich hieraus, das unser Verfahren das oben geforderte Kennzeichen vollständiger Independenz (s. o. 5) an sich trägt, indem jede Determinante, sowohl von oben wie von unten gelesen, den gleichen Werth ergiebt.

Einfach ist auch Euler's Beweis (s. o. 2):

$$(a_1, a_2 \ldots a_n) = (a_n \ldots a_2, a_1).$$

Diese Relation giebt uns ein einfaches Mittel zum Beweise des Satzes an die Hand, auf welchen Simon (s. o.) seine schöne Theorie der periodischen Kettenbrüche gegründet hat. Es ist [91])

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \ldots + \frac{b_n}{a_n}\right) \cdot \left(\frac{1}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \ldots + \frac{b_n}{a_n}\right) \ldots \left(\frac{1}{a_n}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{a_n} + \frac{b_n}{a_{n-1}} + \ldots + \frac{b_2}{a_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{b_{n-1}}{a_{n-2}} + \ldots + \frac{b_2}{a_1}\right) \ldots \left(\frac{1}{a_1}\right)$$

Denn schreibt man sämmtliche hier vorkommende Kettenbrüche wieder als Quotienten zweier Determinanten, so erhält man

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_n & a_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_4 & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_n & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_n & a_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_3 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_4 & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_n & a_n \end{vmatrix}} \cdots \frac{1}{a_n} =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_2 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-2} & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_2 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_n & a_{n-1} & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_2 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{n-1} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-2} & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots b_2 & a_1 \end{vmatrix}} \cdots \frac{1}{a_1}$$

Nun hebt sich offenbar stets ein Zähler gegen den rechts neben

ihm stehenden Nenner auf, und die Gleichung reducirt sich auf die nachstehende

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & b_n & a_n \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ b_n & a_{n-1} & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & b_2 & a_1 \end{vmatrix}}$$

Dass aber diese Gleichung eine identische ist, haben wir bereits gesehen.

87) **Simon**, Ueber periodische Kettenbrüche, **Grunert's** Archiv, XXXII. Theil, S. 451.

88) **Becker**, **Schlömilch's** Zeitschrift, Ueber einen Fundamentalsatz der Determinantentheorie. 16. Theil, S. 526.

89) **Schwarz**, Elemente der Zahlentheorie, Halle 1855. S. 48.

90) **Grunert**, Ueber die Grundformeln der Dioptrik und Katoptrik, Archiv, II. Theil, S. 164.

91) **Simon**, S. 450.

21. Da bekanntlich der Coëfficient jedes Termes einer Determinante dadurch gefunden werden kann, dass man dieselbe partiell nach jenem Terme differentiirt, so erhält man

$$p_n = a_n \frac{\partial R_1}{\partial a_n} + b_n \frac{\partial R_1}{\partial a_{n-1}}$$

$$q_n = a_n \frac{\partial R_2}{\partial a_n} + b_n \frac{\partial R_2}{\partial a_{n-1}}$$

unter R_1 und R_2 die bezüglichen Determinanten verstanden. Es ist auf diese Weise überhaupt leicht, die Differentialquotienten von Kettenbrüchen anzugeben, sofern nur alle Elemente des Systems von einander unabhängig sind. Da es jedoch von Interesse ist, auch Kettenbrüche von der durch **Gauss'** [92]) und **Heine's** [93]) Untersuchungen bekannt gewordenen Form

$$\frac{1}{1 -} \frac{\varrho_1 x}{1 -} \frac{\varrho_2 x}{1 - \ldots}$$

differentiiren zu können, so muss hier ein anderer Weg eingeschlagen werden.

Der nte Näherungswerth dieses Kettenbruches ist

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -\varrho_1 x & 1 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -\varrho_2 x & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -\varrho_{n-1} x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -\varrho_1 x & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -\varrho_2 x & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -\varrho_{n-1} x & 1 \end{vmatrix}}$$

Um den Differentialquotienten dieses Ausdruckes zu finden, bedienen wir uns nachstehenden Satzes von Jacobi[94]). Sind die Elemente der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & . & . & p_1 \\ a_2 & b_2 & . & . & p_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & . & p_n \end{vmatrix}$$

von ein und derselben Variablen x abhängig, so ist

$$\frac{dR}{d} = \Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx} + \frac{\partial R}{\partial b_1}\frac{db_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dx}\right)$$

Es wird nun vortheilhaft sein, unsre obigen Determinanten so umzuändern, dass statt

$$\varrho_1 x,\ \varrho_2 x \ldots \varrho_{n-1} x$$

ausschlieslich x selbst darin vorkommt, indem alsdann der totale Differentialquotient

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

sein wird. Diess hat keine Schwierigkeit, indem man nur entsprechende Zeilen in beiden Determinanten resp. mit

$$-\varrho_1,\ -\varrho_2 \ldots -\varrho_{n-1}$$

zu dividiren braucht, — eine Operation, welche, da sie im Zähler

und Nenner gleichmässig vorgenommen wird, keine Aenderung des Werthes zur Folge hat. Wir bekommen so den Näherungswerth in der Form

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & -\frac{1}{\varrho_1} & \frac{1}{\varrho_1} & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\varrho_2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & x & -\frac{1}{\varrho_{n-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ x & -\frac{1}{\varrho_1} & \frac{1}{\varrho_1} & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\varrho_2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & x & -\frac{1}{\varrho_{n-1}} \end{vmatrix}}$$

Da nun in diesen Determinanten, mit Ausnahme der Veränderlichen selbst, lediglich constante Glieder vorkommen, so erhalten wir durch Anwendung unseres oben aufgestellten Satzes, indem wir etwa den Nenner differentiiren, folgende Relation

$$\frac{dq_n}{dx} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & -\frac{1}{\varrho_2} & \frac{1}{\varrho_2} & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\varrho_3} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & x & -\frac{1}{\varrho_{n-1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & \frac{1}{\varrho_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\varrho_2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & x & -\frac{1}{\varrho_{n-1}} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ x & -\frac{1}{\varrho_1} & \frac{1}{\varrho_1} & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\varrho_2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & x & \frac{1}{\varrho_{n-2}} \end{vmatrix}$$

Entsprechend lässt sich natürlich anch das Differential des Zählers angeben:

$$\frac{dp_n}{dx} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -\frac{1}{\varrho_2} & \frac{1}{\varrho_2} & \cdots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\varrho_3} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots x & -\frac{1}{\varrho_{n-1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & \frac{1}{\varrho_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \frac{1}{\varrho_2} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots x & -\frac{1}{\varrho_{n-1}} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -\frac{1}{\varrho_1} & \frac{1}{\varrho_1} & \cdots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\varrho_2} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots x & \frac{1}{\varrho_{n-2}} \end{vmatrix}$$

Stellen wir nun, der Einfachheit halber, Zähler und Nenner in der Form

$$p_n = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ und } q_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dar und bezeichnen eine nach dem Element a_{ik} dieser beiden Determinanten genommene Unterdeterminante durch

$$\frac{\partial p_n}{\partial a_{ik}} \text{ und } \frac{\partial q_n}{\partial a_{ik}}$$

so erhalten wir

$$\frac{d\left(\frac{p_n}{q_n}\right)}{dx} = \frac{q_n \sum\limits_{i-3=k-2} \frac{\partial p_n}{\partial a_{ik}} - p_n \sum\limits_{i-2=k-1} \frac{\partial q_n}{\partial a_{ik}}}{q_n^{\,2}}$$

Die dem Summenzeichen beigeschriebne Relation giebt zu erkennen, dass die Summation über alle diejenigen a_{ik} sich zu erstrecken hat, für welche die Gleichung

$$i - 3 = k - 2$$

im oder was dasselbe ist,

$$i - 2 = k - 1$$

besteht. Man sieht nämlich, dass diese Relation der Bedingung entspricht für die links der Diagonalreihe stehende, ihr parallele, Serie von Elementen, welche eben in den ursprünglichen Determinanten die Variablen enthalten.

Anmerkung. Der Nenner q_n^2 würde sich natürlich vermittelst des Multiplicationssatzes als Eine Determinante darstellen lassen; überhaupt giebt uns jenes Theorem ein Mittel an die Hand, jede Potenz eines beliebigen Kettenbruches zu berechnen. In dem speciellen Falle jedoch, wo ein nter Näherungsbruch auf die $(n-1)$te Potenz erhoben werden soll, lässt sich dieselbe noch kürzer dadurch finden, dass man [95] die adjungirten Determinanten bildet. Die vierte Potenz des Kettenbruches

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4}$$

ist z. B. gleich folgendem Ausdruck

$$\frac{\begin{vmatrix} a_2a_3a_4+a_2b_4+a_4b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3a_4b_1+a_4b_1b_3 & a_1b_1b_3 & b_1b_3b_4 \\ 0 & -a_4b_1 & a_2a_4b_1 & a_2b_1b_4 \\ 0 & b_1 & -a_2b_1 & a_2a_3b_1+b_1b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2a_3a_4+a_2b_4+a_4b_3 & a_3a_4b_2+b_2b_4 & a_4b_2b_3 & b_2b_3b_4 \\ -(a_3a_4+b_4) & a_1a_3a_4+a_1b_4 & a_1a_4b_3 & a_1b_3b_4 \\ a_4 & -a_1a_4 & a_1a_2a_4+a_4b_2 & a_1a_2b_1+b_1b_4 \\ -1 & a_1 & -(a_1a_2+b_2) & a_1a_2a_3+a_3b_2+a_1b_3 \end{vmatrix}}$$

92) Gauss, Comm. soc. Gotting. rec. T. II. 1812.

93) Heine, Ueber eine gewisse Reihe von allgemeiner Form, Crelle's Journal, 34. Theil. S. 294.

94) Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig 1870. S. 281.

95) Baltzer, S. 49.

22. Es ist bekannt, dass jede Quadratwurzel sich auf doppelte Art in einen Kettenbruch entwickeln lässt. Lagrange [96] hat die

eine dieser Methoden nntersncht und die bezüglichen Sätze bewiesen, während die zweite sich in ihren Anfängen, wie Wöpcke gezeigt hat, bereits auf die arabischen Mathematiker [97]) zurückführen lässt. Es gelang jedoch Lagrange nicht, die Art der Periodicität vollständig festzustellen. Wir wissen nunmehr, dass dieselbe eine reciproke ist, diess Wort in dem oben (s. o. 15) festgesetzten Sinne genommen, jedoch mit dem Beisatze, dass auf die jenem Gesetze unterliegenden Glieder noch ein weiteres folgt, gleich dem doppelten der in dem Wnrzelausdrucke enthaltenen Quadratzahl. Dieser Satz, welcher meist nur unvollkommen durch Induktion nachgewiesen zu werden pflegt, lässt sich folgendermassen leicht beweisen, indem wir einen von Müller [98]) ausgesprochnen Gedanken weiter verfolgen.

Dass der Kettenbruch überhaupt ein periodischer sein muss, geht unmittelbar aus der Sache selbst hervor, indem x nur dann durch eine quadratische Gleichung bestimmt sein kann, wenn man hat

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + x$$

Wir setzen also

$$x = \sqrt{A^2 + m} = A + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + x$$

Der nte Näherungswerth dieses Kettenbruches ist nun folgender

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{s p_{n-1} + p_{n-2}}{s q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Setzen wir hier für s den Werth q + x, so erhalten wir offenbar x selbst; es ist also

$$x = \frac{(s + x)\, p_{n-1} + p_{n-2}}{(s + x)\, q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Hieraus ergiebt sich die qnadratische Gleichung

$$x^2 + \left(s + \frac{q_{n-2} - p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) x = \frac{p_n}{q_{n-1}}$$

Der rechts stehende Ausdruck ist nun eine ganze Zahl, desshalb muss auch

$$\frac{q_{n-2} - p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

eine solche sein, was aber nur möglich ist, wenn

$$q_{n-2} = p_{n-1}$$

wird. Diess kann hinwiederum nur dann geschehen, wenn, das A auf die linke Seite gebracht, die Relation stattfindet

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & b & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & c & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & c & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & b & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & a \end{vmatrix}$$

Es ist dann also

$$\sqrt{A^2 + m} - A = \frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\ldots+\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{s + \sqrt{A^2 - m} - A}$$

und es bleibt uns nur noch die Bestimmung des Terms s übrig.

Wir können unsre Gleichung offenbar auch so schreiben:

$$(\sqrt{A^2 + m} - A)^2 + s(\sqrt{A^2 + m} - A) = \frac{p_n}{q_{n-1}}$$

und erhalten durch Ausrechnung

$$m + 2A^2 - 2A\sqrt{A^2 + m} + s\sqrt{A^2 + m} - As = \frac{p_n}{q_{n-3}}$$

Damit diese Gleichung stets eine identische sei, muss ersichtlich

$$s = 2A$$

$$\frac{p_n}{q_{n-1}} = m$$

sein. Hieraus ergiebt sich auch noch folgende Relation

$$mq_{n-1} - 2Aq_{n-2} = p_{n-2}$$

Es würde, um die charakteristische Periodicität zu erweisen, offenbar genügen, diese Relation festgestellt zu haben.

Zu dieser Relation können wir nun auch leicht gelangen, wenn wir die bewusste Form des Kettenbruches a priori annehmen und synthetisch verfahren. Es sei

$$\sqrt{A^2 - m} - A = \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\ldots+\frac{1}{c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{\sqrt{A^2+m}+A}$$

Wendet man die Bezeichnung durch Determinanten an und zerlegt in Unterdeterminanten, so erhält man

$$(\sqrt{A^2-m}-A)\left[(\sqrt{A^2-m}+A)\begin{vmatrix} b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,..\, c & & -1 \\ 0 & 0 & 0 \,..\, 1 & & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,..\, d & & -1 \\ 0 & 0 & 0 \,..\, 1 & & c \end{vmatrix}\right]$$

$$= (\sqrt{A^2+m}+A)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,..\, c & & -1 \\ 0 & 0 & 0 \,..\, 1 & & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,..\, d & & -1 \\ 0 & 0 & 0 \,..\, 1 & & c \end{vmatrix}$$

Führt man die Multiplication aus und berücksichtigt die Gleichheit der beiden reciproken Determinanten, so erhält man

$$m\begin{vmatrix} b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,..\, c & & -1 \\ 0 & 0 & 0 \,..\, 1 & & b \end{vmatrix} - A\begin{vmatrix} b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,..\, d & & -1 \\ 0 & 0 & 0 \,..\, 1 & & c \end{vmatrix} = A\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,..\, d & & -1 \\ 0 & 0 & 0 \,..\, 1 & & c \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,..\, d & & -1 \\ 0 & 0 & 0 \,..\, 1 & & c \end{vmatrix}$$

oder

$$m\begin{vmatrix} b & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,..\, c & & -1 \\ 0 & 0 & 0 \,..\, 1 & & b \end{vmatrix} - 2A\begin{vmatrix} b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,..\, d & & -1 \\ 0 & 0 & 0 \,..\, 1 & & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \,..\, d & & -1 \\ 0 & 0 & 0 \,..\, 1 & & c \end{vmatrix}$$

Diese Gleichung ist nun aber, wie man sofort sieht, identisch mit der nachstehenden

$$mq_{n-1} - 2Aq_{n-2} = p_{n-2}$$

und es ist damit die Realität unsrer hypothetisch angenommenen Form dargethan.

96) Lagrange, Sur la resolution des problèmes indéterminés du second degré, Histoire de l'academie royale des sciences et belles lettres, Berlin 1769. S. 215.

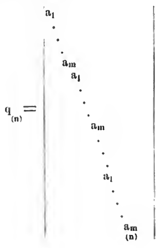
97) Wöpcke, Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chezles orientaux d'après des traités inédits arabes et persans, Paris 1855. S. 56.

98) R. Müller, Ueber einige die periodischen Kettenbrüche betreffende Sätze, Grunert's Archiv, VI. Theil, S. 151.

24. Wir wollen uns im Folgenden noch weiter mit den periodischen Kettenbrüchen beschäftigen und einige Sätze entwickeln, welche nns gestatten, einen nfach periodischen Kettenbruch in beqnemer Weise durch die vorhergehenden Perioden auszndrücken, so dass wir schliesslich zu einer independenten Darstellung gelangen, ohne zn der nnvollkommenen Darstellung dnrch Determinanten aus Determinanten greifen zn müssen. Es wird hiebei natürlich nicht die specielle Form derjenigen Kettenbrüche zu Grunde gelegt, welche man durch Entwicklung einer Qnadratwurzel enthält, sondern ganz allgemein die Form

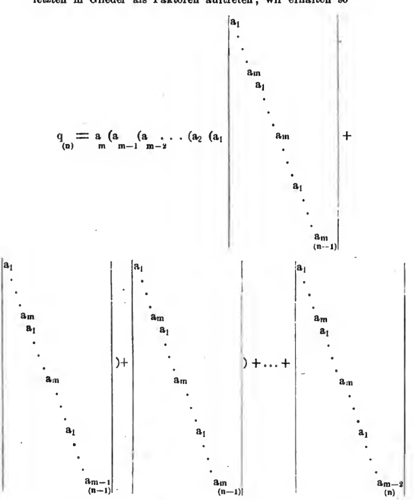
$$x = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_m + x}$$

Betrachten wir den (m . n)ten Näherungs-Nenner dieses Kettenbrnches, wo m also den Grad der Periode anzeigt, so ist derselbe gleich der Determinante



wenn wir der Einfachheit halber, blos das Diagonalglied anschreiben.

Wir zerlegen nun diese Determinante, von unten anfangend, in Unterdeterminanten, so zwar, dass schliesslich die sämmtlichen letzten m Glieder als Faktoren auftreten; wir erhalten so



Jede der m hier auftretenden Determinanten, mit Ausnahme der drei ersten, bereits auf die einfachste Form gebrachten, lässt

sich nun wieder auf ähnliche Weise behandeln, bis schliesslich ein Aggregat von Ausdrücken erhalten wird, welche resp. mit den Determinanten

$$q_{(n-1)} = \begin{vmatrix} a_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_m & & & & & & \\ & & & a_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_m & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & a_1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & a_m \\ & & & & & & & & & {\scriptstyle (n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad q_{1\,(n-1)} = \begin{vmatrix} a_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_m & & & & & & \\ & & & a_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_m & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & a_1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & a_{m-1} \\ & & & & & & & & & {\scriptstyle (n-1)} \end{vmatrix}$$

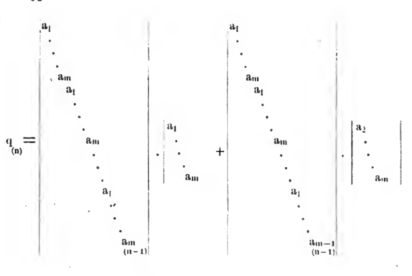
als Faktoren behaftet sind. Betrachten wir diese Ausdrücke näher, so zeigt sich, dass die Glieder des ersten Polynoms identisch sind mit den Gliedern der Determinante

$$q_{(1)} = \begin{vmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{vmatrix}$$

und ebenso die Glieder des zweiten Polynoms identisch mit denen der Determinante

$$p_{(1)} = \begin{vmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{vmatrix}$$

so dass man also erhält



$$q_{(n)} = q_{(1)}\, q_{(n-1)} + p_{(1)}\, q_{1\,(n-1)}$$

Offenbar kann man dieselbe Entwickelung auch für den Zähler durchführen, so dass man auf folgende Relation geleitet wird:

$$p_{(n)} = q_{(1)}\, p_{(n-1)} + p_{(1)}\, p_{1\,(n-1)}$$

Dividirt man diese Gleichung durch die über ihr stehende und setzt $\frac{p_{(n)}}{q_{(n)}} = y_{(n)}$, so ist

$$y_{(n)} = \frac{p_{(n-1)} + \frac{p_{(1)}}{q_{(1)}}\, p_{1(n-1)}}{q_{(n-1)} + \frac{p_{(1)}}{q_{(1)}}\, q_{1(n-1)}} = \frac{p_{(n-1)} + y_{(1)}\, p_{1(n-1)}}{q_{(n-1)} + y_{(1)}\, q_{1(n-1)}}$$

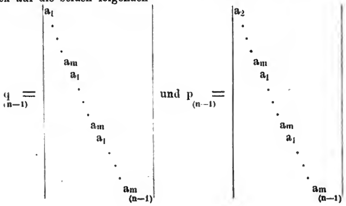
Wir haben zur Ableitung vorstehender Formel die Zerlegung der Determinanten von unten begonnen und sind nach oben fortgeschritten; es ist klar, dass uns eine entsprechende Zerlegung, die von oben nach unten fortschreitet, eine ähnliche Relation liefern wird.

Wir erhalten so

$$q_{(n)} = a_1(a_2(a_3 \ldots a_{m-1}(a_m \begin{vmatrix} a_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_m & & & & & & \\ & & & a_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_m & & & \\ & & & & & & a_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & a_m \end{vmatrix}_{(n-1)} +$$

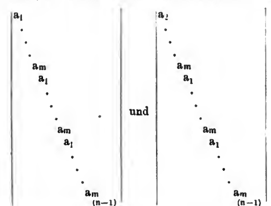
$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_m & & & & & & \\ & & & a_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_m & & & \\ & & & & & & a_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & a_{m-1} \end{vmatrix}_{(n-1)}) + \begin{vmatrix} a_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_m & & & & & & \\ & & & a_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_m & & & \\ & & & & & & a_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & a_m \end{vmatrix}_{(n-1)}) + \ldots \begin{vmatrix} a_3 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_m & & & & & & \\ & & & a_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_m & & & \\ & & & & & & a_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & a_m \end{vmatrix}_{(n)}$$

Durch eine der beim vorigen Satze angewandten ganz analoge Zerlegung führt man wiederum diese Determinanten sämmtlich zurück auf die beiden folgenden



$$q_{(n-1)} = \begin{vmatrix} a_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_m & & & & & & \\ & & & a_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_m & & & \\ & & & & & & a_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & a_m \end{vmatrix}_{(n-1)} \quad \text{und} \quad p_{(n-1)} = \begin{vmatrix} a_2 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_m & & & & & & \\ & & & a_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_m & & & \\ & & & & & & a_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & a_m \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

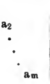
Die Zerlegung des Zählers geht ebenso vor sich; die beiden Determinanten, auf welche sich derselbe zurückführen lässt, sind



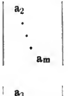
Diese Determinanten sind auch hier mit Faktoren behaftet, als welche sich wiederum die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & a_m \end{vmatrix}$$

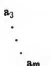
und



für den Nenner, hingegen die Determinanten



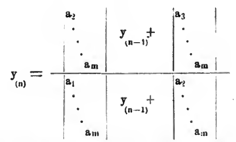
und



für den Zähler ergeben. Behalten wir also die eingeführten Bezeichnungen bei, so bekommen wir

$$y_{(n)} = \frac{\left| \begin{array}{c} a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{array} \right| p_{(n-1)} + \left| \begin{array}{c} a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{array} \right| q_{(n-1)}}{\left| \begin{array}{c} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{array} \right| p_{(n-2)} + \left| \begin{array}{c} a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{array} \right| q_{(n-1)}}$$

und hieraus wiederum, indem wir im Zähler und Nenner mit $q_{(n-1)}$ dividiren



$$y_{(n)} = \frac{\left| \begin{array}{c} a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{array} \right| y_{(n-1)} + \left| \begin{array}{c} a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{array} \right| y_{(n-1)} + \left| \begin{array}{c} a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{array} \right|}$$

Wir sind so auf einen Satz gekommen, welchen Catalan[99]) bereits im Jahre 1845 der société philomatique zu Paris ohne Beweis übergeben hat, und welcher, wie es scheint, auch bis jetzt noch nicht bewiesen wurde. Catalan formulirt denselben folgendermassen: „Si l'on représente par $y_{(n)}$ la valeur que l'on obtient quand on limite la fraction continue aux n premières periodes, on a généralement

$$y_{(n)} = \frac{Py_{(n-1)} + N}{P_1 y_{(n-1)} + N_1}$$

$\frac{P}{P_1}$ étant la réduite équivalente á $y_{(1)}$, et $\frac{N}{N_1}$ la réduite précédente."

Indem wir fernerhin von Catalan's Bezeichnungsweise Gebrauch machen werden, wollen wir an diese Formel die independente Bestimmung des $y_{(n)}$ durch den Term n und die Grössen

$$a_1, a_2 \, . \, . \, . \, a_m$$

anknüpfen. Wir geben zu diesem Ende $y_{(n)}$ die Form

$$\frac{P}{P_1} \cdot \frac{PP_1 y_{(n-1)} + NP_1}{PP_1 y_{(n-1)} + N_1 P} = \frac{P}{P_1}\left(1 + \frac{NP_1 - N_1 P}{PP_1 y_{(n-1)} + N_1 P}\right)$$

Setzen wir hier für $y_{(n-1)}$ seinen Werth

$$\frac{Py_{(n-2)} + N}{P_1 y_{(n-2)} + N_1}$$

so erhalten wir

$$y_{(n)} = \frac{P}{P_1} + \frac{P(NP_1 - N_1 P)}{P_1\left(N_1 P + PP_1 \frac{Py_{(n-2)} + N}{P_1 y_{(n-2)} + N_1}\right)}$$

und indem wir auf die nämliche Weise fortfahren,

$$y_{(n)} = \frac{P}{P_1} + \cfrac{N P_1 - N_1 P}{N_1 P_1 + PP_1 + \cfrac{PP_1\, NP_1 - N_1 P}{N_1 P_1 + PP_1 + \ldots + \cfrac{PP_1\, NP_1 - N_1 P}{N_1 P_1 + PP_{1(n)}}}}$$

Bezeichnen wir einen Kettenbruch von der Form

$$\frac{b}{a + \ldots + \frac{b}{a_{(n)}}}$$

allgemein durch

$$[b, a]_n$$

so ist in unsrem Falle

$$y_{(n)} = \frac{P}{P_1} + \frac{1}{PP_1}\left[(NP_1 - N_1 P)\, PP_1,\ N_1 P_1 + PP_1\right]_n$$

Jedem solchen Kettenbruche können wir nun aber, wie wir früher sahen (s. o. 12), noch eine andre Form geben; thun wir diess, so erhalten wir

$$y_{(n)} = \frac{P}{P_1} + (NP_1 - N_1 P)\frac{\left(\frac{N_1P_1+PP_1}{2} + \sqrt{\frac{(N_1P_1+PP_1)^2}{4} + NP_1 - N_1P}\right)^n - \left(\frac{N_1P_1+PP_1}{2} - \sqrt{\frac{(N_1P_1+PP_1)^2}{4} + NP_1 - N_1P}\right)^n}{\left(\frac{N_1P_1+PP_1}{2} + \sqrt{\frac{(N_1P_1+PP_1)^2}{4} + NP_1 - N_1P}\right)^{n+1} - \left(\frac{N_1P_1+PP_1}{2} - \sqrt{\frac{(N_1P_1+PP_1)^2}{4} + NP_1 - N_1P}\right)^{n+1}}$$

wobei dann noch

$$N_1 = P = \begin{vmatrix} a_2 & -1 & . & . & . & 0 \\ 1 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & a_m \end{vmatrix}$$

$$N = \begin{vmatrix} a_3 & -1 & . & . & . & 0 \\ 1 & a_4 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & a_m \end{vmatrix} \qquad P_1 = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & . & . & . & 0 \\ 1 & a_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & a_m \end{vmatrix}$$

zu setzen ist. Hiemit ist unsre Aufgabe gelöst.

99) Grunert's Archiv, VI. Theil. S. 223.

25. Wir haben bis jetzt von unsrer Darstellungsweise der Näherungswerthe ausschliesslich auf endliche Kettenbrüche Anwendungen gemacht, und in der That ist diese Beschränkung nur zu sehr in der Natur der Sache begründet, indem unendliche Determinanten sich noch weit mehr der Untersuchung zu entziehen scheinen, als unendliche Kettenbrüche. Nur in einem speciellen Falle dürfte die Betrachtung unendlicher Determinanten zu einem brauchbaren Resultate geführt zu haben, nämlich bei der Discussion derjenigen Ausdrücke, durch welche Fürstenau [100]) resp. die kleinste und grösste Wurzel einer beliebigen algebraischen Gleichung dargestellt hat. Für diese Ausdrücke hat Schröder [101]), von einem ganz andren Standpunkte aus, eine Grundlage der Betrachtung geschaffen, auf welche gestützt wir den Zusammenhang solcher Determinanten mit gewissen Kettenbrüchen nachzuweisen im Stande sein werden.

Schröder geht bei seinen Untersuchungen von der geometrischen Betrachtung aus, dass, wenn f_z irgend eine Funktion des complexen Argumentes

$$z = x + iy$$

ist, d. h., wenn zu jedem durch die Coordinaten x und y bestimmten Punkte der Zahlenebene ein andrer

$$f_z = u + iv$$

existirt, eine Zahl $z_1 = u_1 + iv_1$ gefunden werden soll, von der Eigenschaft

$$f_{z_1} = f_z = 0$$

Es werden nun verschiedene Ausdrücke hergeleitet, welche eine bestimmte Wurzel darstellen; dieselben sind zwar im Allgemeinen nicht durch die gewöhnlichen Operationen anszudrücken, wohl aber in speciellen Fällen. Ein solcher symbolischer Ausdruck ist der folgende

$$F_z = \frac{B_\omega^{(\lambda)}(z)}{B_\omega^{(\lambda+h)}(z)}$$

aus welchen eine grössre Anzahl bekannter Formeln durch Specialisirung abgeleitet werden kann. Es wird nun gezeigt, dass, wenn der Wurzelwerth z_1 dem Coordinatenanfangspunkte näher liegt, als irgend ein andrer der Gleichung

$$f_z = 0$$

genügender Punkt, dass alsdann die Relation besteht

$$\lim_{\omega = \infty} F_z = z_1^h$$

Setzen wir $h = 1$, so ergiebt sich die kleinste Wurzel der Gleichung

$$z_1 = \lim_{\omega = \infty} \frac{B_\omega^{(\lambda)}(z)}{B_\omega^{(\lambda+1)}(z)}$$

und diess ist die Formel Fürstenau's.

Es hat derselbe nämlich folgendes System von Gleichnngen aufgestellt, deren jede aus der nächstvorhergehenden durch Multiplication mit x erhalten wird,

$$a_n x + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$$- a_0 x = a_n x^{n+1} + a_{n-1} x^{n} + \dots$$

$$- a_0 x^2 = a_n x^{n+2} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

$$\vdots$$

Betrachtet man in diesen Gleichungen die Potonzen von x als Unbekannte, so sind sie sämmtlich in Bezug auf diese linear, und

man kann also das gewöhnliche Eliminationsverfahren anwenden: es folgt so die Unbekannte x gleich dem Quotienten folgender beiden unendlichen Determinanten

$$\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & . & . & . & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & . & . & . & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}}$$

Zur wirklichen Berechnung einer Wurzel muss man die beiden Determinanten irgendwo abbrechen. Je nachdem nun hiebei die Determinanten des Zählers einen um 1 höheren oder niedrigeren Grad hat, als die des Nenners, erhält man resp. den absolut kleinsten und grössten reellen Wurzelwerth. Die Convergenz des Determinanten-Quotienten ist, dem Obigen zufolge, sicher gestellt. Die Grundzüge dieses Verfahrens finden sich bereits bei einigen älteren Combinatorikern, sowie auch in Fourier's „Analyse des équations determinées."

Haben wir z. B. die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2a_1 x = a_0$$

so sind deren beide Wurzeln

$$x_1 = a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_0}$$
$$x_2 = a_1 - \sqrt{a_1^2 + a_0}$$

Unsrem Verfahren entsprechend erhalten wir

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2a_1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -a_0 & -2a_1 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -a_0 & -2a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -a_0 & -2a_1 \end{vmatrix}_{(n)}}{\begin{vmatrix} -2a_1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -a_0 & -2a_1 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -a_0 & -2a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -a_0 & -2a_1 \end{vmatrix}_{(n-1)}}$$

Multipliciren wir hier im Zähler wie im Nenner jede Vertikalreihe mit (— 1), so erhalten wir

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2a_1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_0 & 2a_1 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_0 & 2a_1 \end{vmatrix}_{(n)}}{\begin{vmatrix} 2a_1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_0 & 2a_1 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -a_0 & 2a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_0 & 2a_1 \end{vmatrix}_{(n-1)}} = 2a_1 + \cfrac{a_0}{2a_1 + \cfrac{a_0}{2a_1 + \ldots}}$$

Durch Gleichsetzung der beiden für x_1 gefundenen Werthe ergiebt sich alsdann die bekannte oben erwähnte (s. o. 23) Kettenbruchentwicklung einer Quadratwurzel; es ist

$$\sqrt{a_1^2 + a_0} = a_1 + \cfrac{a_0}{2a_1 + \cfrac{a_0}{2a_1 + \ldots}}$$

Ebenso ergiebt sich die kleinste Wurzel

$$x_2 = a_1 - \sqrt{a_1^2 + a_0} = \frac{\begin{vmatrix} 2a_1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_0 & 2a_1 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_0 & 2a_1 \end{vmatrix}_{(n-1)}}{\begin{vmatrix} 2a_1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_0 & 2a_1 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_0 & 2a_1 \end{vmatrix}_{(n)}} = \cfrac{a_0}{2a_1 + \cfrac{a_0}{2a_1 + \ldots}}$$

Ist $a_0 = \frac{1}{m}$, so hat man

$$\sqrt{a_1^2 + \frac{1}{m}} = a_1 + \cfrac{\frac{1}{m}}{2a_1 + \cfrac{\frac{1}{m}}{2a_1 + \ldots}}$$

und wenn man je zwei aufeinanderfolgende Zähler und den zwischen ihnen liegenden Nenner mit $\frac{1}{m}$ multiplicirt,

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{m}} = a + \cfrac{1}{2am + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2am + \cfrac{1}{2a + \dots}}}}$$

Diess ist der von Strehlke [102]) gefundene Kettenbruch.

Vermittelst der hier benützten Principien sind wir nunmehr auch in den Stand gesetzt, eine Frage einfach zu entscheiden, welche zu mehrfachen Discussionen Anlass gegeben hat und von Schlömilch [103]) auf analytischem, von Weyr [104]) auf geometrischem Wege gelöst wurde. Es handelt sich nämlich darum, für welche Werthe von a_1 die Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{a_1^2 - a_0} = a_1 - \cfrac{a_0}{2a_1 - \cfrac{a_0}{2a_1 - \dots}}$$

Gültigkeit habe. Offenbar können wir diese Formel sofort aus unsrer Betrachtung ableiten, indem wir nur von der Gleichung

$$x^2 - 2a_1 x + a_0 = 0$$

ausgehen. Wir sahen nun, dass der mit diesem Kettenbruch identische Determinanten-Quotient nur reelle Wurzeln liefern kann; die Entwickelung bleibt also richtig, so lange

$$\sqrt{a_1^2 - a_0}$$

reell, d. h. so lange

$$a_1^2 \geqq a_0$$

ist.

100) Fürstenau, Darstellung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coëfficienten, Marburg 1860.

101) E. Schröder, Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung von Gleichungen, Math. Annalen, 2. Band. S. 347.

102) Strehlke, Brief an Grunert. Archiv, XXX. Theil. S. 275.

103) Schlömilch, Ueber die Kettenbruchentwickelungen für Quadratwurzeln, Zeitschrift, 17. Jahrgang. S. 70.

104) E. Weyr, Erweiterung der Gültigkeit der Entwickelung einer Quadratwurzel in einem Kettenbruch, Prager Ber. Jahrg. 1869. S. 18.

26. Aus der hier charakterisirten Methode von Fürstenau lässt sich auch leicht eine Darstellung der Wurzeln cubischer Gleichungen durch Kettenbrüche ableiten, und da, wie wir oben sahen, über die Natur der Wurzeln gar nichts weiter vorausgesetzt wird, als dass sie sämmtlich reell sind, so eignet sich diese Methode besonders zur Behandlung des irreduciblen Falles.

Soll dieser Fall durch algebraische Operationen gelöst werden, so kann diess natürlich nicht durch eine endliche Anzahl derselben geschehen, da ja die eigentliche Lösung auf transcendente Funktionen führt. Man hat bis jetzt zweierlei solche algebraische Lösungsmethoden, eine ältere von Jacob Bernoulli [105]) und eine neuere von Clausen [106]). Die erste verlangt ein in's Unendliche fortgesetzte Wurzelausziehung — hierhin würde auch die Darstellung einer Wurzel der Gleichung

$$x^3 - ax = b$$

durch den Ausdruck

$$x = \sqrt[3]{(b + a \sqrt[3]{(b + a \sqrt[3]{(b + \ldots}}}$$

gehören — das Verfahren Clausen's führt auf Kettenbrüche. Der angenäherte Wurzelwerth lässt sich bei diesem in der Form

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\sqrt{2+m^{\frac{3}{2}}} & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2+m^{\frac{3}{2}}}\right)} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2+m^{\frac{3}{2}}}\right)}\right)} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2+m^{\frac{3}{2}}}\right)} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2+m^{\frac{3}{2}}}\right)}\right)} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}$$

darstellen, die obige Gleichung zu Grunde gelegt und

$$m = \frac{3}{a}\, b^{\frac{2}{3}}$$

gesetzt. Es lässt sich, wie man sieht, die Wurzel independent mit jeder beliebigen Genauigkeit angeben; jedoch müssen auch hier die Wurzelausziehungen als ein Uebelstand bezeichnet werden. Es soll unsre Aufgabe sein, die kleinste der drei reellen Wurzeln der allgemeinen Gleichung

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

in einen von allen Irrationalitäten freien Kettenbruch zu entwickeln.

Wir bekommen nach Fürstenau sofort

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}}$$

Subtrahiren wir die zweite Colonne von der dritten, nachdem wir die letztre mit a_2 multiplicirt haben, so erhalten wir

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2^2-a_1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & a_1a_2-a_0 & a_2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a_0a_2 & a_1 & a_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_1 & a_2^2-a_1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & a_1a_2-a_0 & a_2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a_0a_2 & a_1 & a_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}}$$

und hieraus ergiebt sich, indem wir nunmehr die vierte Colonne mit

$$a_2{}^2 - a_1$$

multipliciren und von ihr alsdann die dritte abziehen,

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2{}^2 - a_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 a_2 - a_0 & a_2(a_2{}^2 - a_1) - (a_1 a_2 - a_0) & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & a_0 a_2 & a_1(a_2{}^2 - a_1) - a_0 a_2 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0(a_2{}^2 - a_1) & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_1 & a_2{}^2 - a_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 a_2 - a_0 & a_2(a_2{}^2 - a_1) - (a_1 a_2 - a_0) & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & a_0 a_2 & a_1(a_2{}^2 - a_1) - a_0 a_2 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0(a_2{}^2 - a_1) & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}$$

Eine analoge Behandlung der 5ten Colonne, welche, mit

$$a_2(a_2{}^2 - a_1) - (a_1 a_2 - a_0)$$

multiplicirt, von der vierten subtrahirt wird, liefert

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2^2 - a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1a_2 - a_0 & a_2(a_2^2 - a_1) - (a_1a_2 - a_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0a_2 & a_1(a^2_2 - a_1) - a_0a_2 & a_2(a_2(a_2^2 - a_1) - (a_1a_2 - a_0)) - (a_1(a_2^2 - a_1) - a_0a_2) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0(a_2^2 - a_1) - a_1 & a_1(a_2(a_2^2 - a_1) - (a_1a_2 - a_0)) - (a_0(a_2^2 - a_1) - a_1) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2^2 - a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1a_2 - a_0 & a_2(a_2^2 - a_1) - (a_1a_2 - a_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0a_2 & a_1(a_2^2 - a_1) - a_0a_2 & a_2(a_2(a_2^2 - a_1) - (a_1s_2 - a_0)) - (a_1(a_2^2 - a_1) - a_0a_2) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0(a_2^2 - a_1) - a_1 & a_1(a_2(a_2^2 - a_1) - (a_1a_2 - a_0)) - (a_0(a_2^2 - a_1) - a_1) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}$$

Wir sehen so, dass der fünfte Näherungswerth von x_3 gleich ist dem Kettenbruche

$$a_1 - \frac{a_0a_2}{a_1 -} \frac{a_0(a_2^2 - a_1)}{a_1a_2 - a_0 -} \frac{a_0a_2[a_2(a_2^2 - a_1) - (a_1a_2 - a_0)]}{a_1(a_2^2 - a_1) - a_0a_2} - \frac{(a_0(a_2^2 - a_1) - a_1)[a_2(a_2(a_2^2 - a_1) - (a_1a_2 - a_0)) - (a_1(a_2^2 - a_1) - a_0a_2)]}{a_1[a_2(a_2^2 - a_1) - (a_1a_2 - a_0)] - [a_0(a_2^2 - a_1) - a_1]}$$

und da, wie man sofort bemerkt, der 1 . 2 . . . 5te Näherungswerth dieses Kettenbruches identisch ist, mit den betreffenden Näherungswerthen des obigen Determinanten-Quotienten, so ist der Schluss gestattet, dass jener Ausdruck selbst gleich ist dem hier vorliegenden Kettenbruche, nach dem in ihm liegenden Gesetze in's Unendliche fortgesetzt. Da dessen Convergenz, wie wir sahen, bereits sicher steht, so handelt es sich nur noch darum, aus den gegebnen Anfangsgliedern dieses Fortschreitungsgesetz zu abstrahiren.

Wie der Angenschein lehrt, zerfällt jeder Theil-Zähler in zwei ungleiche Faktoren; man erhält nun den grösseren Faktor jedes Näherungszählers, wenn man den grösseren Faktor des vorhergehenden mit a_2 mnltiplicirt und hievon den vorhergehenden Theil-Nenner abzieht; der kleinre Faktor hingegon ist ersichtlich gleich dem mit a_0 multiplicirten grösseren Faktor des zweit-vorhergehenden Theil-Zählers, davon den kleineren Faktor des nnmittelbar vorhergehenden snbtrahirt. Hat man also den Kettenbrnch

$$a_1 - \frac{a_0 a_2}{a_1} - \cdots - \frac{m_{p-1}\, n_{p-1}}{M_{p-1}} - \frac{m_p\, p_p}{M_p}$$

$$n_{p-1} > m_{p-1}$$

$$n_p > m_p$$

so ist dem eben Gesagten zufolge, der $(p + 1)$te Theilzähler gleich

$$(a_2 n_p - M_p)\,(a_0 n_{p-1} - m_{p-1})$$

und ebenso findet sich der $(p + 1)$te Theilnenner gleich

$$a_1 n_{p-1} - m_p$$

Auf diese Weise ist es also möglich, die gesnchte Wnrzel mit jeder beliebigen Gonanigkeit direkt in den Coëfficienten der Gleichung ausgedrückt zu erhalten. Das zweite Glied der Gleichung mnss hier vorhanden sein, indem man sonst auf den nnbrauchbaren Werth

$$a_1 - \frac{0}{a_1} - \frac{-a_0 a_1}{-a_0 - \cdots}$$

geführt werden würde. Ist sonach die Gleichung

$$x^3 + Ax = B$$

vorgelegt, so ist es nöthig, derselben erst durch eine lineare Substitution ein zweites Glied zu geben.

Anmerknng. Der oben aus den übereinstimmenden ersten Näherungswerthen geführte Nachweis der Identität beider unendlicher Ausdrücke kann selbstverständlich keinen Anspruch auf Strenge machen. Es würde sich zwar der genaue Induktionsbeweis unschwer erbringen lassen; es ist diess aber nicht geschehen, weil es zn weit führen würde. Eine diesen Gegenstand in seiner ganzen Allge-

meinheit erledigende Note wird in den „Annalen“ erscheinen.

105) Jacob Bernoulli, opera, Genève 1744. Tom. II. S. 536.

106) Grunert, Neue Auflösung des irreduciblen Falles bei den cubischen Gleichungen durch die Kettenbrüche, Archiv, II. Theil. S. 416.

27. Es soll nunmehr auch gezeigt werden, wie sich die Determinanten mit Nutzen bei gewissen Problemen der mathematischen Physik verwenden lassen, wo man bis jetzt, wie besonders in der Optik, auf die Algorithmen von Euler und Möbius (s. o. 2 und 7) angewiesen war. Ganz neuerdings hat Casorati [107]), gestützt auf die in der Vorrede erwähnte Arbeit von Thiele, die Umsetzung dieser Algorithmen in Kettenbruch-Determinanten durchgeführt, sich dabei jedoch auf ein System von 4 Linsen beschränkt und nur anhangsweise die allgemeine Formel gegeben. Es soll hier von unsrer Bezeichnungsweise ein ausgedehnter Gebrauch gemacht werden.

Sind $h_1, h_2 \ldots h_n$ die Abstände der Linsen-Mittelpunkte $g_1, g_2 \ldots g_n$ die Reciproken der Brennweiten dieser Linsen, und $a_1, a_2 \ldots a_n, b_1, b_2 \ldots b_n$ resp. die Abstände von Objekt und Bild von den verschiednen als unendlich dünn betrachteten Linsen, so bestehen nach Möbius (s. o. 7) folgende Systeme von Gleichungen

$$\begin{gathered} b_1 + a_2 = h_1 \\ b_2 + a_3 = h_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} + a_n = h_{n-1} \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = g_1 \\ \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = g_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} = g_n \end{gathered}$$

Hieraus folgt nachstehender Kettenbruch

$$\cfrac{1}{g_n - \cfrac{1}{h_{n-1} - \cfrac{1}{g_{n-1} - \cfrac{1}{h_{n-2} - \cdots - \cfrac{1}{g_1 - \cfrac{1}{a_1}}}}}}$$

Es ist also

$$b_n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & h_{n-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & g_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & g_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_n & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & h_{n-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & g_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & g_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & a_1 \end{vmatrix}}$$

Zerlegt man hier, von rechts untên beginnend, in Unterdeterminanten, so bestimmt sich

$$b_n = \frac{a_1 \begin{vmatrix} g_1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & h_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & g_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & h_{n-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & g_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & g_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & h_{n-1} \end{vmatrix}}{a_1 \begin{vmatrix} g_1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & h_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & h_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & g_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & g_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & h_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & g_n \end{vmatrix}}$$

Für jedes Linsensystem werden nun diese vier Determinanten ein für allemal berechnet, und es ist dann leicht, zu jedem a_1 das zugehörige b_n zu finden.

Wir hatten bisher ein centrirtes System angenommen; diese Voraussetzung wollen wir nunmehr fallen lassen. Die Coordinaten des Centrums der $(m + 1)$ten brechenden Fläche seien ξ_m, η_m, ζ_m,

das Brechungsverhältniss beim Uebergange aus dem p ten zum (p + 1)ten Mittel sei

$$\frac{n_{p+1}}{n_p}$$

Wir setzen voraus, dass n_0 den Werth 1 habe. Führen wir schliesslich noch eine Reihe von Abkürzungen dadurch ein, dass wir

$$\frac{1-n_1}{r_1} = u_1, \ \frac{n_1-n_2}{r_2} = u_2 \ldots$$

$$\frac{\xi_1}{n_1} = t_1, \ \frac{\xi_2}{n_2} = t_2 \ldots$$

setzen, unter $r_1, r_2 \ldots r_n$ resp. die Krümmungsradien der einzelnen Linsen verstanden, so besteht nach Neesen [108]) für die x-Coordinate des Bildes folgende Relation. Es ist

$$x_{m+1} = \frac{n_1 \ldots n_{m-1} (t_1, u_2 \ldots n_m)\, x_m + n_1 \ldots n_m (t_1, u_2 \ldots t_{m-1})}{n_1 \ldots n_{m-1} (u_1, t_1 \ldots u_m)\, x_m + n_1 \ldots n_m (u_1, t_1 \ldots t_{m-1})}$$

wo x_m die Abscisse des bei der vorhergehenden Brechung entstehenden Bildes ist. Hebt man hier im Zähler und Nenner mit

$$n_1 \ldots n_{m-1}$$

so sieht man, dass man auch schreiben kann

$$x_{m+1} = \frac{\begin{vmatrix} t_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & u_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\; t_{m-1} & x_m \\ 0 & 0 & \ldots\; 1 & n_m x_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & u_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\; t_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\; 1 & n_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & t_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\; t_{m-1} & x_m \\ 0 & 0 & \ldots\; 1 & u_m x_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & t_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\; t_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\; 1 & n_m x_m \end{vmatrix}}$$

Sowohl im Zähler, als auch im Nenner, stimmen die Determinanten bis auf die letzte Vertikalreihe überein; man kann sie also summiren und hat dann

$$x_{m+1} = \frac{\begin{vmatrix} t_1 & 1 & . & . & . & 0 \\ 1 & u_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & t_{m-1} & x_m \\ 0 & 0 & . & . & 1 & u_m x_m + n_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & 1 & . & . & . & 0 \\ 1 & t_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & t_{m-1} & x_m \\ 0 & 0 & . & . & 1 & u_m x_m + n_m \end{vmatrix}}$$

und es findet sich, was anscheinend noch nicht bemerkt wurde,

$$x_{m+1} = \cfrac{1}{u_1 - \cfrac{1}{t_1 - \cfrac{1}{u_2 - \cfrac{1}{t_2 - \ldots - \cfrac{1}{u_{m-1} - \cfrac{1}{t_{m-2} - \cfrac{x_m}{u_m x_m + n_m}}}}}}}$$

Hier haben wir somit die eine Coordinate des durch die letzte Brechnng entstehenden Bildes ausgedrückt durch die entsprechende Coordinate des durch die vorhergehende Brechung entstehendes Bildes, sowie durch eine Reihe für das nämliche Linsensystem und das nämliche Objekt constanter Grössen. Berücksichtigt man nun, dass ebenso

$$x_m = \cfrac{1}{u_1 - \cfrac{1}{t_1 - \cfrac{1}{u_2 - \cfrac{1}{t_2 - \ldots - \cfrac{1}{u_{m-2} - \cfrac{1}{t_{m-2} - \cfrac{x_{m-1}}{u_{m-1} x_{m-1} + n_{m-1}}}}}}}}$$

ist und schreibt man

$$\frac{x_m}{u_m x_m + n_m}$$

in der Form

$$\frac{1}{u_m + \frac{n_m}{x_m}}$$

so erhält man

$$x_{m+1} = \cfrac{1}{u_1 - \cfrac{1}{t_1 - \cfrac{1}{u_2 - \cfrac{1}{t_2 - \cdots - \cfrac{1}{u_{m-1} - \cfrac{1}{t_{m-1} - \cfrac{1}{u_m + n_m u_1 - \cfrac{n_m}{t_1 - \cfrac{1}{u_2 - \cdots - \cfrac{1}{u_{m-1} + \cfrac{n_{m-1}}{x_{m-1}}}}}}}}}}}}$$

Durch unausgesetzte Anwendung dieses Substitutionsverfahrens erhält man so schliesslich x_{m+1} ausgedrückt durch einen Kettenbruch, welcher, abgesehen von den Constanten des Systems, u und t, nur noch die Grösse x_1 enthält. Wir kommen so zu dem interessanten Satz, dass die eine Coordinate des Bildpunktes nur von der entsprechenden Coordinate des Objektpunktes abhängig ist. Der Mö-

bins'sche Kettenbruch ist als ein Specialfall des hier entwickelten zu betrachten.

107) Casorati, Le proprieta cardinali degli strumenti ottici anche non centrati (alla sposa), Milano 1872. S. 73.

108) Neesen, Ueber die Abbildnng von leuchtenden Objekten in einem nicht centrirten Linsensystem, Bonn 1871. S. 18.

28. Einen andren Dienst leisten uns die Kettenbrüche und deren independente Darstellung in der Elektricitätslehre. Ist eine elektrische Masse Q [109]) in der Entfernung s vom Centrum einer Kngel vom Radius R vorhanden (welch' letztre jedoch durch einen Draht mit dem Erdboden in leitende Verbindung gebracht sein muss), so erzeugt sich auf letztrer dnrch Influenz (Induktion) eine Quantität

$$-\frac{QR}{s}$$

Die Wirkung ist alsdann gerade so, als ob in dem „elektrischen Bildpunkt," dessen Distanz von dem Centrum der zweiten Kngel

$$\frac{R^2}{s}$$

ist, die Quantität Q concentrirt wäre. Denken wir uns diesen Akt der gegenseitigen Elektricitätsmittheilung n mal wiederholt und ist q_n die nte inducirte Quantität, ϱ_n die Distanz des zngehörigen Bildpunktes vom Mittelpnnkt der betreffenden Kugel, so bestehen folgende Relationen, $Q = 1$, $R = 1$ gesetzt,

$$q_{n+1} = \frac{q_n}{s-\varrho_n} \quad \varrho_{n+1} = \frac{1}{s-\varrho_n}$$

und hieraus

$$\varrho_0 = 0 \qquad q_0 = 1$$

$$\varrho_1 = \frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} \qquad q_1 = \frac{1}{s} = \frac{1}{s_1}$$

$$\varrho_2 = \frac{s}{s^2-1} = \frac{s}{s_2} \quad q_2 = \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{s_2}$$

$$\vdots$$

$$\varrho_n = \frac{s_{n-1}}{s_n}, \quad q_n = \frac{1}{s_n}$$

Die Anfgabe ist nun, den reciproken Werth von q_n in eine nach geraden Potenzen von s fortlaufende Reihe zu entwickeln; in etwas complicirter Weise ist diess bereits von Wand [110]) geschehen.

Wir erhalten aus dem Obigen direkt

$$\varrho_n = \cfrac{1}{s - \cfrac{1}{s - \ldots - \cfrac{1}{s_{(n)}}}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & s & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1 & s_{(n)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & s & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & s & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1 & s_{(n)} \end{vmatrix}}$$

und demnach

$$\frac{1}{q_n} = \begin{vmatrix} s & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & s & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & s & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1 & s \end{vmatrix}$$

Dass diese symmetrische Determinante sich nach absteigenden Potenzen des Diagonalgliedes in eine Reihe entwickeln lasse, leuchtet nun sofort ein. Die Entwickelung ergiebt

$$\frac{1}{q_n} = s_n - (n-1)\, s_{n-2} + \frac{(n-2)\,(n-4)}{2!}\, s^{n-4} - \ldots$$

Anmerkung. Wir hätten diese Reihe auch sofort erhalten können, wenn wir die Clausen'sche Formel (s. o. 12) angewandt, die in ihr vorkommenden Quadratwurzeln nach dem binomischen Lehrsatze aufgelöst und entsprechende Glieder zusammengefasst hätten. Strehlke hat diess für den nten Näherungs-Nenner des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{a + \ldots + \cfrac{1}{a}}$$

gethan [111]); er findet denselben gleich

$$a^n + (n-1)\, a^{n-2} + \frac{(n-2)\,(n-3)}{2!}\, a^{n-4} + \ldots$$

woraus für negative Theilzähler der obige Werth hervorgeht.

109) Wand, Die Principien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie, Leipzig 1871. S. 159.

110) Ibid. S. 161.

111) Strehlke, Ueber die nten Näherungswerthe der periodischen Kettenbrüche

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \ldots \quad \text{und} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots$$

Grunert's Archiv, XLII. Theil. S. 341.

Wir haben im Vorstehenden zu zeigen versucht, dass die einzige Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen, welche allen Anforderungen entspricht, diejenige vermittelst Determinanten sei, und dass diese Darstellungsweise auch bei verschiednen Gelegenheiten, welche die Anwendung der Kettenbrüche erfordern, sich höchst nützlich erweise. Es darf sogar gesagt werden, dass in der Lehre von den Determinanten der Schlüssel für die Behandlung der Kettenbrüche enthalten ist, und gewiss wird jeder Satz, um welchen sich die erstre Disciplin bereichert, auch für die Ausbildung der Theorie der letztren förderlich gemacht werden können.

Zusätze zu Kapitel I. und II.

Zu §. 6. Als dieser Paragraph zu Anfang des Jahres 1872 niedergeschrieben ward, konnte man nicht voraussehen, dass jenes Jahr für diese Lehre einen so reichen Beitrag liefern werde. Es ist hier zunächst hinzuweisen auf die bereits (s. o. 24) citirte Schrift von Casorati, in welcher sich eine Anwendung der Determinanten auf dioptrische Probleme durchgeführt findet.

Indessen beruht der betreffende Abschnitt im Wesentlichen auf der einfachen Umgestaltung der bekannten Euler'schen Algorithmen in Kettenbruch-Determinanten, ohne für die Theorie der letztren wesentlich Neues zu liefern, während sich sonst aus dieser Abhandlung mancher beachtenswerthe Satz ergeben dürfte.

Ferner ist zu erwähnen, dass Hattendorf[112]) Kettenbruchdeterminanten angeführt hat, mehr freilich in der Absicht, die Verwendung der Determinanten durch ein interessantes Beispiel zu illustriren. „Bezeichnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} q_1 & -p_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & q_2 & -p_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_3 & -p_4 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{n-1} & -p_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & q_n \end{vmatrix}$$

mit Q_{1n} . . . Darin erkennt man aber die Recursionsformeln, nach welchen die Zähler und Nenner der Näherungswerthe des Kettenbruches

$$q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \ldots + \cfrac{p_{s-1}}{q_{s-1} + \cfrac{p_s}{q_s}}}}$$

berechnet werden."

Vor Allem wichtig hingegen ist eine kürzlich erschienene Arbeit G. Bauer's [113], indem dieselbe sich nicht darauf beschränkt, die independente Darstellung der Näherungswerthe einfach zu zeigen, sondern höchst wichtige Anwendungen davon macht. Durch eine Reihe eleganter Determinanten-Transformationen wird der Lehrsatz bewiesen, dass das Produkt der beiden Kettenbrüche

$$a-1 + \frac{1^2}{2(a-1)^2} + \frac{3^2}{2(a-1)^2} + \ldots$$

und

$$a+1 + \frac{1^2}{2(a+1)^2} + \frac{3^2}{2(a+1)^2} + \ldots$$

stets den Werth a^2 hat, woraus sich alsdann eine Wallis'sche Formel leicht ableiten lässt.

Schliesslich ist zu bemerken, dass auch Sylvester *) sich der Kettenbruchdeterminanten bedient hat.

Zu §. 8. Die im Anfang dieses Paragraphen stehende Angabe, dass Scheibner zuerst die Ableitung der Kettenbrüche aus trinomischen Gleichungen gegeben habe, beruht auf einem Irrthum **). Den ersten speziellen Fall, wie auch den allgemeineren hat bereits L. Euler in zwei diesem Gegenstand gewidmeten Aufsätzen behandelt [114].

Noch vor Scheibner hat auch G. Bauer auf dieselbe aufmerksam gemacht [115].

Es wird dort

$$e^{ax} = A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots$$

gesetzt, und man fragt nach der Bedeutung von A_a. Man findet

$$A_1 = -\frac{3}{2a}\left[\left(\frac{1}{a} - 1\right)e^{a} - \left(1 + \frac{1}{a}\right)e^{-a}\right]$$

$$A_2 = +\frac{5}{2a}\left[\left(1 - \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2}\right)e^{a} - \left(1 + \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2}\right)e^{-a}\right]$$

und hieraus A_n von der Form

$$A_n = (-1)^n \frac{2n+1}{2a}\left(P_n e^{a} - Q_n e^{-a}\right),$$

---

*) Persönliche Mittheilung von Hrn. Professor Dr. Stern.

**) Persönliche Mittheilung von Hrn. Professor Dr. G. Bauer.

„wo P_n und Q_n Polynome von $\frac{1}{a}$ sind. Um das Gesetz, nach welchem dieselben gebildet sind, zu finden, substituire man für

$$A_{n+1}, \ A_n, \ A_{n-1}$$

ihre Ausdrücke in die Relation, welcher sie genügen, nnd bemerke, dass die Coëfficienten von

$$e^{a} \text{ und } e^{-a}$$

in der so erhaltenen Gleichung einzeln gleich Nnll sein müssen, so ergeben sich folgende Relationen, von $n = 1$ an

$$P_{n+1} - P_{n-1} - \frac{2n+1}{a} P_n = 0$$

$$Q_{n+1} - Q_{n-1} - \frac{2n+1}{a} Q_n = 0$$

aus welchen man ersieht, dass P_n nnd Q_n der Zähler und Nenner des n ten Näherungsbruches sind.

Da ferner die Coëfficienten A_n mit wachsendem n gegen Null convergiren, so muss der Werth des vollständigen Kettenbruchs

$$e^{-2a}$$

sein.“ Man erkennt, dass hier die in Frage stehende Ableitung bereits als bekannt zn Grunde gelegt ist.

Zu §. 11. Der Beweis des Satzes, welcher die Ueberführung eines aufsteigenden Kettenbruches in einen absteigenden ermöglicht, ist am angeführten Orte durch den Schlnss von n auf $(n + 1)$ geführt worden. Da es aber gewiss wünschenswerth ist, alle Induktionsbeweise möglichst aus der Wissenschaft zu verbannen, so möge hier ein unmittelbar aus den Eigenschaften der Determinanten geschöpfter Beweis nachgeliefert werden. Es handelt sich also darum, die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ b_3 & a & a_3 & -1 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 & -1 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix}$$

entsprechend zu transformiren. Der Einfachheit halber betrachten wir nicht den allgemeinsten Fall, indem die Ausdehnnng anf diesen nicht die geringsten Schwierigkeiten hat.

Multiplicirt man die 4. Zeile mit b_5, die 5. mit b_4, nnd zieht erstre von letztrer ab, so erhält man

$$\triangle = \frac{1}{b_4 b_5}\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & -1 & 0 \\ b_4 b_5 & 0 & 0 & a_4 b_5 & -b_5 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 b_5 & a_5 b_4 + b_5 \end{vmatrix}$$

Dividirt man die 4. Zeile nunmehr mit b_5, multiplicirt die 3. und 4. resp. mit b_4 und b_3 und subtrahirt wiederum die erstre von der letztren, so folgt

$$\triangle = \frac{1}{b_4^2 b_3}\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ b_3 b_4 & 0 & a_3 b_4 & -b_4 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 b_4 & a_4 b_3 + b_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 b_5 & a_5 b_4 + b_5 \end{vmatrix}$$

Die dritte Zeile lässt sich nun durch b_4 dividiren; die nämliche Operation, wie oben, indem als Faktoren für die 3. und 2. Zeile resp. b_3 und b_2 auftreten, liefert

$$\triangle = \frac{1}{b_2 b_3^2 b_4}\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 b_3 & a_2 b_3 & -b_3 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 b_3 & a_3 b_2 + b_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 b_4 & a_4 b_3 + b_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 b_5 & a_5 b_4 + b_5 \end{vmatrix}$$

Dividiren wir nun die 2. Zeile mit b_3, so ist unsre obige Determinante in die mit dem Faktor

$$\frac{1}{b_2 b_3 b_4}$$

behaftete Kettenbruchdeterminante

$$\triangle^1 = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 b_3 & a_3 b_2 + b_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 b_4 & a_4 b_3 + b_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 b_5 & a_5 b_4 + b_5 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{b_1 b_2 b_3 b_4}\begin{vmatrix} a_2 b_1 + b_2 & -1 & 0 & 0 \\ -a_2 b_3 & a_3 b_2 + b_3 & -1 & 0 \\ 0 & -a_3 b_4 & a_4 b_3 + b_4 & -1 \\ 0 & 0 & -a_4 b_5 & a_5 b_4 + b_5 \end{vmatrix}$$

übergegangen.

Zu §. 12. Sämmtliche Beweise des Clausen'schen Theoremes erscheinen etwas gekünstelt, so auch der in diesem Paragraphen vorgetragne. Es dürfte sich desshalb der nun folgende empfehlen, welcher bei einer ganz anderen Untersuchung sich von selbst ergab.

Bezeichnet man mit s_t die Summe der tten Potenzen der Wurzeln der Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

so erhält man [116]) das bekannte Newton-Girard'sche System recurrirender Gleichnngen

$$a_1 + a_0s_1 = 0$$
$$2a_2 + a_1s_1 + a_0s_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$ta_t + a_{t-1}s_1 + \dots + a_1s_{t-1} + a_0s_t = 0$$

und hieraus folgt dann

$$s_t = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^t \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 4a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ta_t & a_{t-1} & a_{t-2} & a_{t-3} & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

Wendet man diess auf die quadratische Gleichung

$$x^2 + ax = b$$

an, deren Wurzeln resp.

$$x_1 = -\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)$$
$$x_2 = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)$$

sind, so erhält man, wenn man den Quotienten

$$\frac{s_{t-1}}{s_t}$$

zu bestimmen sucht,

$$\frac{s_{t-1}}{s_t}=\frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t}+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t}}=\frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 2b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots b & a \end{vmatrix}_{(t-1)}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 2b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots b & a \end{vmatrix}_{(t)}}$$

Nun ist, wie wir sahen, wenn wir resp. mit q_k und p_k Nenner und Zähler des k ten Näherungswerthes des Kettenbruches

$$\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\dots}}$$

bezeichnen,

$$q_k=\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots b & a \end{vmatrix}_{(k)} \qquad bq_{k-1}=p_k=b\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots b & a \end{vmatrix}_{(k-1)}$$

Zerlegen wir jetzt die beiden obigen Determinanten, dadurch, dass wir

$$2b = b + b$$

setzen, in zwei Summanden, so folgt

$$\frac{s_{t-1}}{s_t}=\frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}}=\frac{q_{t-1}+bq_{t-3}}{q_t+bq_{t-2}}$$

Da, dem Obigen zufolge,

$$q_t = aq_{t-1} + bq_{t-2}$$
$$bq_{t-3} = q_{t-1} - aq_{t-2}$$

ist, so ergiebt sich durch Einsetzung der betreffenden Werthe

$$\frac{s_{t-1}}{s_t}=\frac{2q_{t-1}-aq_{t-2}}{aq_{t-1}+2bq_{t-2}}$$

und wenn man aus dieser Gleichung das Verhältniss

$$\frac{q_{t-2}}{q_{t-1}}$$

bestimmt,

$$\frac{q_{t-2}}{q_{t-1}} = \frac{2 - a\,\frac{s_{t-1}}{s_t}}{a + 2b\,\frac{s_{t-1}}{s_t}}$$

und, wenn man für $\frac{s_{t-1}}{s_t}$ wieder seinen Werth substituirt,

$$\frac{q_{t-2}}{q_{t-1}} = \frac{2\left(\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^t+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^t\right) - a\left(\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}\right)}{a\left(\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^t+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^t\right) + 2b\left(\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}\right)}$$

Indem man sowohl im Zähler, wie im Nenner resp.

$$\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1} \text{ und } \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}$$

heraussetzt und entsprechend zusammenfasst, fliesst hieraus als Schlussformel

$$\frac{q_{t-2}}{q_{t-1}} = \frac{1}{b}\frac{p_{t-1}}{q_{t-1}} = \frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1} - \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^t - \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^t}$$

Hiernach ist auch oben (S. 51) vor dem Bruchstrich noch der Faktor b hinzuzufügen.

112) Hattendorf, Einleitung in die Lehre von den Determinanten, Hannover 1872. S. 20.

113) G. Bauer, Von einem Kettenbruche Euler's und einem Satze von Wallis, München 1872.

114) Euler, Comment. Acad. Petrop. 1739.
Id. Acta Acad. Scient. imper. Petrop. 1779.

115) G. Bauer, Ueber die Coëfficienten der Reihen von Kugelfunktionen einer Variablen, Crelle's Journal, 56. Theil. S. 4.

116) Fiedler, Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen, Leipzig 1862. S. 44.

Zu §. 21 sei noch bemerkt, dass für die partiellen Differentialquotienten desshalb griechische ∂ angewandt wurden, weil das hiefür gewöhnlich gebrauchte Zeichen sich in der Druckerei nicht vorfand.

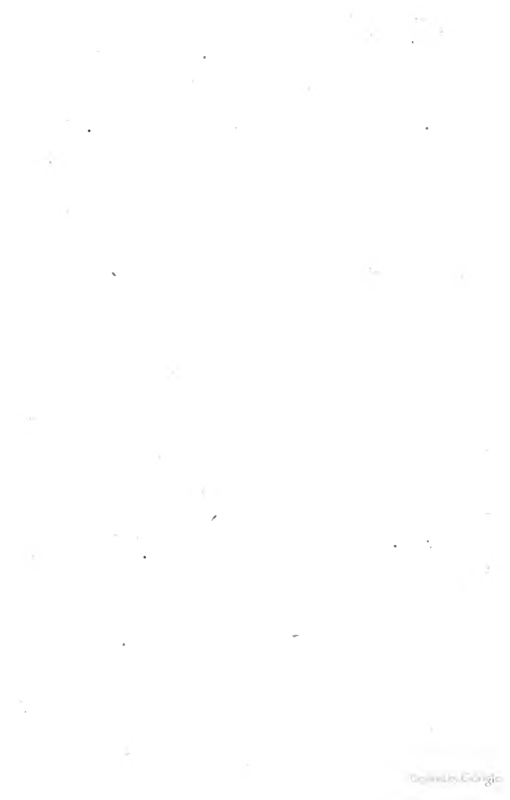


Berichtigungen.

S. 62 Z. 10 v. u. l.

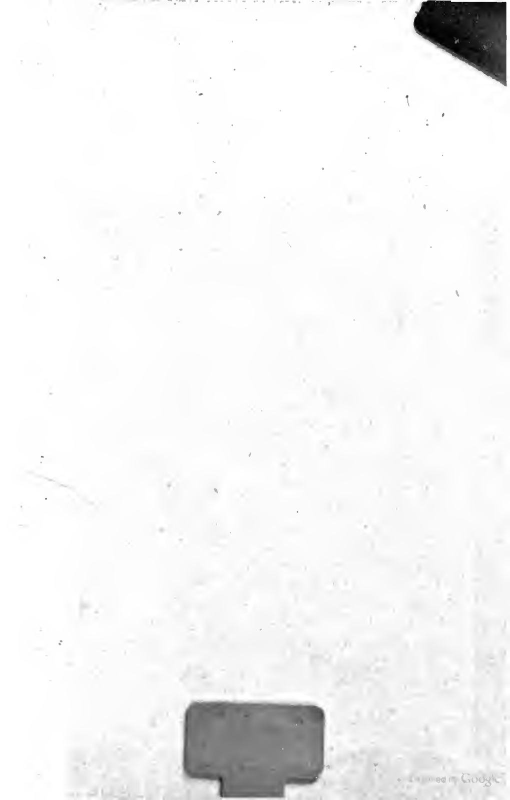
$$\frac{a^2_r}{a_r} + 1 - \frac{1}{a_s + 1 - \frac{a^2_s}{a_s}}$$

S. 63 Z. 16 v. u. statt o l. c.
S. 91 Z. 16 v. o. statt vierte l. dritte.
S. 110 Z. 4 v. o. statt kleinste l. grösste.
S. 113 Z. 11 v. o. statt p_p l. n_p.
S. 120 Z. 11 v. u. l. s^n und s^{n-2}
S. 127 Z. 10 v. u. statt $^{t-1}$ l. ^{t}.










BIBLIOTECA